UNIVERSITÉ DE PARIS

BIBLIOTHÈQUE

DE LA

FACULTÉ DES LETTRES

X

L'IMAGINATION ET LES MATHÉMATIQUES SELON DESCARTES

PAR

PIERRE BOUTROUX

LICENCIÉ ÈS LETTRES

« Solus intellectus equidem percipiendæ
» veritatis est capax ; qui tamen juvandus
» est ab imaginatione sensu et memoria, ne
» quid forte quod in nostra industria positum est omittamus. »
(*Regulæ*, XII, 71.)

PARIS
ANCIENNE LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET Cie
FÉLIX ALCAN, ÉDITEUR
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1900



UNIVERSITÉ DE PARIS

BIBLIOTHÈQUE

DE LA

FACULTÉ DES LETTRES

X

L'IMAGINATION ET LES MATHÉMATIQUES SELON DESCARTES

LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN, 108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

BIBLIOTHÈQUE

DE LA

FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

I. — **De l'authenticité des Épigrammes de Simonide**, par AMÉDÉE HAUVETTE, professeur adjoint de langue et de littérature grecques à la Faculté. 1 vol. in-8°................ 5 fr.

II. — **Antinomies linguistiques**, par VICTOR HENRY, professeur de sanscrit et de grammaire comparée des langues indo-européennes à la Faculté. 1 vol. in-8°................ 2 fr.

III. — **Mélanges d'histoire du moyen âge**, publiés sous la direction de M. le Professeur LUCHAIRE, par MM. LUCHAIRE, DUPONT-FERRIER et POUPARDIN. 1 vol. in-8° .... 3 fr. 50

IV. — **Études linguistiques sur la Basse-Auvergne. Phonétique historique du patois de Vinzelles**, par A. DAUZAT, licencié ès lettres. Préface de A. THOMAS, chargé du cours de philologie romane à la Faculté. 1 vol. in-8°........................ 6 fr.

V. — **La Flexion dans Lucrèce**, par A. CARTAULT, professeur de poésie latine à la Faculté. 1 vol. in-8°.............. 4 fr.

VI. — **Le Treize Vendémiaire an IV**, par HENRY ZIVY, étudiant à la Faculté. 1 vol. in-8°.............. .... 4 fr.

VII. — **Essai de restitution des plus anciens mémoriaux de la Chambre des Comptes de Paris** (*Pater*, *Noster* [1], *Noster* [2], *Qui es in cælis*, *Croix*, *A* [1]), par MM. JOSEPH PETIT, archiviste aux Archives nationales, GAVRILOVITCH, MAURY et TEODORU, avec une préface de Ch.-V. LANGLOIS, chargé de cours à la Faculté. 1 vol. in-8°, avec une planche hors texte........... 9 fr.

VIII. — **Études sur quelques manuscrits de Rome et de Paris**, par ACHILLE LUCHAIRE, professeur d'histoire du moyen âge à la Faculté. 1 vol. in-8°.......................... 6 fr.

IX. — **Étude sur les Satires d'Horace**, par A. CARTAULT, professeur de poésie latine à la Faculté. 1 vol. in-8°.......... 11 fr.

X. — **L'Imagination et les Mathématiques selon Descartes**, par Pierre BOUTROUX, licencié ès lettres. 1 vol. in-8°... ... . 2 fr.

SOUS PRESSE

XI. — **Étude sur le dialecte alaman de Colmar (Haute-Alsace)**, par VICTOR HENRY, professeur de sanscrit et de grammaire comparée des langues indo-européennes à la Faculté. 1 vol. in-8°.

XII. — **La main-d'œuvre industrielle en Grèce**, par P. GUIRAUD, professeur adjoint à la Faculté. 1 vol. in-8°.

MACON, PROTAT FRÈRES, IMPRIMEURS.

UNIVERSITÉ DE PARIS

BIBLIOTHÈQUE

DE LA

FACULTÉ DES LETTRES

X

L'IMAGINATION ET LES MATHÉMATIQUES SELON DESCARTES

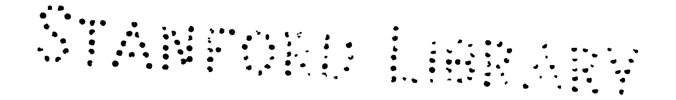
PAR

PIERRE BOUTROUX

LICENCIÉ ÈS LETTRES

« Solus intellectus equidem percipiendæ
« veritatis est capax ; qui tamen juvandus
« est ab imaginatione sensu et memoria, ne
« quid forte quod in nostra industria posi-
« tum est omittamus. »

(*Regulæ*, XII, 71.)



PARIS
ANCIENNE LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET Cie
FÉLIX ALCAN, ÉDITEUR
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108

1900

L'IMAGINATION ET LES MATHÉMATIQUES

SELON DESCARTES

> « Solus intellectus equidem perci-
> « piendæ veritatis est capax : qui
> « tamen juvandus est ab imagina-
> « tione, sensu et memoria, ne quid
> « forte quod in nostra industria posi-
> « tum est omittamus. »
>
> (*Regulæ*, XII, 71.)

Bien que plusieurs auteurs modernes, et en particulier M. Liard, aient réagi contre cette opinion, on pense généralement que Descartes s'est proposé de restreindre le rôle joué par l'imagination en mathématiques. Nous lisons en effet presque à chaque page, dans les *Méditations*, que l'entendement seul peut connaître au vrai sens du mot, et Descartes le prouve par des exemples empruntés précisément aux mathématiques. Il y a plus : si l'on en croit Auguste Comte[1], c'est sur ce principe qu'est fondée la géométrie analytique tout entière. Mais, d'autre part, dans la seconde moitié des *Regulæ*[2], qui traite de logique appli-

1. Sur l'interprétation de la géométrie analytique donnée par Auguste Comte, voir en particulier Liard : *Descartes*, livre II, chap. I. D'après ce philosophe, « la grande idée-mère de Descartes serait relative à la représentation analytique des formes géométriques ».

2. Les dernières règles que nous possédons à partir de la quatorzième traitent presque uniquement du rôle de l'imagination dans la science. Dans ces règles Descartes, ayant exposé précédemment comment l'esprit arrive à connaître le vrai, cherche à déterminer quels procédés pratiques la science doit employer, cela en s'appuyant sur des considérations tirées tant du sujet connaissant que de l'objet à connaître. — Voir *Regulæ*, XII, 71.

quée, l'imagination est présentée comme un auxiliaire presque indispensable de l'entendement. De plus, dans leurs ouvrages scientifiques [1], nous voyons souvent Descartes et ses commentateurs traduire en images sensibles les notions abstraites, et c'est même en cela que consisterait, d'après M. Liard, la grande innovation mathématique du philosophe. Il y a là, comme on voit, une contradiction, sans doute apparente, mais qu'il ne faut pas laisser passer inaperçue, car le problème qu'elle soulève touche à plusieurs points importants de la philosophie cartésienne.

Ce problème est, en premier lieu, relatif à la méthode. La mathématique de Descartes est, on s'accorde à le reconnaître, l'application immédiate de sa méthode. On a même soutenu, et cette opinion, quoique exagérée, contient sans doute une part de vérité, qu'il a conçu toutes les sciences sur le modèle de celle-là. Aussi n'a-t-il pas voulu seulement, en créant cette mathématique, enrichir la science de découvertes précieuses et de nombreux faits inconnus avant lui : il s'est proposé surtout d'ouvrir à l'esprit humain des voies nouvelles pour découvrir la vérité. Mais alors le premier problème qu'il a rencontré a dû être le suivant : Lesquelles de nos facultés interviennent dans le raisonnement mathématique? Car il n'eût pas été possible d'aborder les règles de détail exposées dans les *Regulæ* et le *Discours de la Méthode* avant d'avoir résolu ce problème fondamental, dont elles dépendent évidemment. Aussi, bien que Descartes n'ait jamais traité cette question en elle-même, il serait fort utile, pour comprendre sa logique, de savoir quelle solution il lui apportait.

Mais cette question n'intéresse pas seulement la logique. Elle se rapporte aussi, et de là vient sa gravité, à l'une des parties essentielles de la métaphysique cartésienne, je veux dire à la théorie des rapports de l'imagination avec l'entendement, autrement dit du corps avec l'âme. L'union de l'âme et du corps est, selon Descartes, un simple fait, la juxtaposition de deux substances qui n'ont rien de commun et ne peuvent pas, par suite, agir directement l'une sur l'autre. Mais il reste à savoir si cette juxtaposition est sans conséquences, si le corps n'a pas sur

1. *Géométrie* et *Correspondance*. — Les ouvrages des commentateurs, principalement de Florimond de Beaune et de Schooten, ont été publiés, pour la plupart, dans l'édition latine de la *Géométrie* (Édition Elzévir, 2 vol. Leyde, 1659).

l'entendement une influence indirecte. Or, l'étude du raisonnement mathématique nous fournit un moyen d'aborder ce problème. Imaginons en effet un entendement qui ne soit pas uni à un corps. Il est bien certain que cet entendement, trouvant en lui les idées de toutes choses, pourra constituer une géométrie. Cette géométrie, seule possible pour un tel entendement, serait-elle aussi pour l'homme la plus natuelle et la plus avantageuse? Ou bien mon corps va-t-il changer les conditions où je suis placé à tel point que j'aie besoin de mon imagination, ne fût-ce que pratiquement, pour découvrir les propriétés du triangle? On le voit, étudier l'influence du corps sur l'entendement revient à traiter la question ainsi posée, et, pour cette raison encore, il serait intéressant d'en rechercher la solution.

C'est là ce que je me propose de faire dans ce travail, en essayant de déterminer quel rôle Descartes attribue à l'imagination dans la science mathématique, et quel rôle en fait il lui fait jouer. J'espère ainsi lever la contradiction signalée au début, et montrer une fois de plus, à propos du point particulier qui nous occupe, qu'on peut trouver dans les principes métaphysiques de Descartes les fondements de sa méthode mathématique. Il y a là dans tous les cas une confrontation intéressante à faire, qu'elle doive jeter un jour sur la métaphysique de Descartes, sur sa mathématique, ou sur toutes les deux.

PREMIÈRE PARTIE

Les principes de la connaissance mathématique.

Je vais considérer en premier lieu [1], au point de vue de l'imagination, les principes de la connaissance mathématique, abstraction faite des procédés employés par l'homme pour l'acquérir. J'étudierai ensuite au même point de vue la démonstration, c'est-à-dire la méthode pratique dont la science fait usage. Ces deux études sont distinctes et doivent être faites séparément : rien n'empêche en effet l'imagination, en admettant qu'elle n'intervienne que peu ou point dans la connaissance intuitive, de jouer un grand rôle dans le raisonnement médiat. Toutefois elles ne sont pas sans lien entre elles, les principes de la connaissance mathématique servant de fondement à la démonstration. Le présent chapitre a donc un double objet : il est à la fois une partie indépendante et une introduction au suivant.

I

L'imagination peut-elle jouer un rôle dans la connaissance mathématique? Pour répondre à cette question, commençons par indiquer brièvement comment Descartes définit nos différentes facultés représentatives, et quelles fonctions il leur attribue [2] :

1° Les sens externes reçoivent passivement des impressions

1. Cette division correspond au plan adopté par Descartes dans les *Regulæ*. Voir page 1, note 2.

2. Voir *Regulæ*, XII, 71-80 ; cf. *Traité des passions de l'âme*, I, art. 12 et sqq. *Principes*, IV, 188 ; *Dioptrique*, Discours IV.

venant des objets extérieurs, comme la cire reçoit l'empreinte du cachet [1];

2° L'impression est transportée ensuite des sens externes au sens commun (*sensorium commune*) ;

3° Le sens commun, à son tour, agit sur l'imagination comme le cachet sur la cire et y imprime une image [2] ;

4° L'imagination agit sur la force motrice (*vis motrix*) ou les nerfs ;

5° Enfin, sans que nous puissions nous expliquer le passage du corps à l'esprit, les nerfs font naître une idée dans l'entendement.

Tel est le processus par lequel l'impression primitive provoque l'apparition d'une idée. Quant à la mémoire [3], Descartes la présente le plus souvent comme une véritable partie du corps, où certaines images s'impriment d'une façon durable et subsistent même après que la sensation a disparu.

Quels peuvent être, d'après cela, les rôles de nos différentes facultés? D'abord l'entendement intervient dans toute opération de l'esprit ; mais il n'en est pas de même des autres facultés. En effet, le processus décrit plus haut aboutit toujours à une idée, mais son point de départ n'est pas forcément une sensation ou une image. On peut donc répartir les opérations de notre esprit en quatre classes, de la manière suivante [4] :

L'entendement peut être passif ou actif. En tant que passif il peut : 1° agir de concert avec l'imagination et les sens, et il est dit voir, toucher ; 2° s'appliquer à l'imagination directement et aux sens indirectement par l'intermédiaire de la mémoire, ou se souvenir. En tant qu'actif, il peut : 1° s'appliquer à l'imagination pour créer de nouvelles figures [5] (*imaginari*) ; 2° agir seul [6] (*intelligere*, entendre).

1. « Sensus omnes extremos sentire per passionem tantum, eadem « ratione qua cera recipit figuram a sigillo ; neque hoc per analogiam dici « putandum est... » (*Regulæ*, XII, 74. Éd. Garnier, p. 95.)

2. « Sensum communem fungi etiam vice sigilli ad easdem figuras vel « ideas in phantasia vel imaginatione veluti in cera formandas atque hanc « phantasiam esse veram partem corporis. » (*Regulæ*, XII, 77, p. 97.)

3. Sur ce qu'est la mémoire d'après Descartes, voir plus bas, page 16 et note 1.

4. Voir *Regulæ*, XII, 79, p. 98. Toute opération de l'entendement est désignée par le terme général « pensée ». Cf. *Principes*, I, 9.

5. Dans ce cas-là aussi la mémoire jouera le plus souvent un rôle ; car l'entendement trouvera en elle les éléments des figures qu'il créera dans l'imagination.

6. Descartes insiste beaucoup sur cette idée que l'entendement peut

Il résulte de là que la science peut faire usage de l'imagination sans recourir aux sens. Il n'est pas nécessaire, par exemple, pour imaginer une figure de la tracer sur le papier : il suffit de l'envisager comme présente par la force et l'application intérieure de son esprit [1]. L'image est alors empruntée à la mémoire, à moins qu'elle ne soit créée par l'entendement. Dans les deux cas il nous faudra, pour nous la représenter, un certain effort, une contention d'esprit [2] et c'est ce qui permet de distinguer l'image de l'idée.

L'imagination étant ainsi définie, en quoi peut-elle nous aider à connaître ? C'est ce que je vais maintenant examiner.

II

La Psychologie nous a enseigné que nos différentes facultés se réduisent en définitive à l'entendement agissant de différentes manières. Mais Descartes va plus loin. Non seulement, dit-il, c'est l'entendement qui imagine et sent aussi bien qu'il entend (*intelligit*), mais il ne peut connaître au vrai sens du mot qu'en tant qu'il a une idée et non en tant qu'il sent ou imagine [3].

agir seul. Voir *Réponses aux 5mes objections*, 15. Éd. Cousin, p. 257 : « L'esprit peut agir indépendamment du cerveau, car il est certain qu'il est « de nul usage lorsqu'il s'agit de former des actes d'une pure intellection, « mais seulement quand il est question de sentir ou d'imaginer quelque « chose ».

1. *Méditations*, VI, 2, p. 323. C'est ce que Descartes appelle un peu plus loin : regarder comme présent par les yeux de l'esprit.

2. « Et cette particulière contention d'esprit montre évidemment la diffé- « rence qui est entre l'imagination et l'intellection ou conception pure. » (*Méditations*, VI, 2, p. 324.)

3. Je rapporte ici la doctrine exposée dans les *Méditations*. Dans les *Regulæ* Descartes se prononce beaucoup moins nettement ; certains passages même surprennent un peu. Ainsi (*Regulæ*, XIV, 119, p. 123) Descartes dit en propres termes que la ligne et la surface sont abstraites du corps par l'intelligence, ce qui semble indiquer que leurs idées ne sont pas primitivement innées en nous. Ailleurs (*Regulæ*, XII, 83, p. 101), il établit une distinction entre les natures simples, intellectuelles, matérielles ou communes, et il dit : « Pure intellectuales illæ sunt quæ per lumen quod- « dam ingenitum et absque ullius imaginis corporeæ adjumento ab intel

Qu'est-ce par exemple que connaître un morceau de cire[1]? Par connaître, j'entends saisir la vraie nature d'une chose[2], ce qui subsiste lorsque le reste change. Or, qu'est-ce qui demeure ainsi dans la cire, lorsqu'on lui fait subir toutes les modifications possibles? Ce n'est rien de tout ce que j'y perçois par les sens, couleur, odeur, température, dureté. Est-ce alors ce que se représente mon imagination, à savoir quelque chose d'étendu, de flexible et de muable? Non, car la cire peut occuper plus ou moins d'étendue; elle peut revêtir une infinité de formes différentes, et il est impossible que mon imagination se représente toutes ces formes. Il faut donc admettre que mon entendement seul peut connaître un morceau de cire.

S'ensuit-il que l'imagination n'intervienne nullement dans la connaissance? Évidemment non, s'il s'agit d'un objet connu par expérience, d'un morceau de cire par exemple; car l'idée d'un tel objet ne peut pas naître en nous sans une image. Mais les notions mathématiques ne sont pas empiriques : elles sont en nous dès l'origine, à l'état d'idées innées[3]. En effet, quand j'en

« lectu cognoscuntur : tales enim nonnullas esse certum est... » Or, d'après les *Méditations*, cette définition devrait s'appliquer à toutes les natures simples sans exception et non pas, comme le dit ce passage, à quelques-unes. — Il y a donc, on le voit, plusieurs points importants sur lesquels les *Regulæ* et les *Méditations* s'accordent mal (Voir l'*Appendice* II). Faut-il en conclure que le premier de ces ouvrages n'exprime pas la pensée définitive de Descartes, et devons-nous expliquer l'apparente contradiction relevée au début de ce travail par une évolution historique? Je ne le crois pas : cette évolution, si elle existe, n'est pas un changement de doctrine, mais seulement de point de vue. Déjà, dans les *Regulæ*, Descartes nous dit qu'il ne traite des choses qu'en tant qu'elles sont perçues par l'intelligence : « quamobrem hic de rebus non agentes nisi quantum ab intellectu perci- « piuntur » (*Regulæ*, XII, 82, p. 100). Selon lui, en effet, c'est par l'entendement seul que nous prenons conscience des natures simples, qui sont tout ce que nous connaissons des choses. Seulement, dans les *Regulæ*, Descartes, plus préoccupé de la pratique qu'il ne le sera dans les *Méditations*, tient à montrer qu'*en fait* nous nous servons toujours de l'imagination, quand nous voulons concevoir clairement les natures corporelles.

1. Voir *Méditations*, II, 9.

2. Descartes répète à plusieurs reprises que l'idée nous fait connaître « la vraie et immuable nature » d'une chose, son « essence éternelle et « immuable ».

3. Voir 5me *Méditation* sur l'idée innée du triangle. — Cf. *Réponses aux 5mes objections*, 54, p. 319. « Les essences de ces choses n'ont point été « tirées d'aucunes choses existantes. »

prends conscience, il me semble que je me ressouviens[1]; de plus, le triangle dont j'ai l'idée est parfait : or, théoriquement, sans doute, rien ne s'oppose à ce qu'il existe dans l'univers un tel triangle, mais en réalité nous ne rencontrons autour de nous que des triangles imparfaits[2]. Les notions mathématiques ne sont donc point tirées des choses existantes, et je n'ai besoin pour les connaître que de mon entendement. Il semble même que je ne pourrai avoir aucun avantage à traduire ces notions en images, car ce serait substituer à l'idée qui est parfaite une représentation imparfaite.

Cependant Descartes n'a pas voulu dire que les notions mathématiques soient créées par notre esprit, et ne s'appliquent pas exactement à la réalité sensible[3]. L'idée a toujours, selon lui, une réalité objective[4]; elle n'est pas notre œuvre, mais l'œuvre de Dieu qui l'a créée immuable et éternelle[5]. En fait, il est vrai, il n'existe pas de triangle parfait dans la nature, mais il se pourrait qu'il en existât; dans tous les cas, nous en rencontrons autour de nous les éléments[6]. Dès lors, grâce à la puissance créatrice de l'imagination[7], nous pourrons perfectionner les images des figures géométriques qui nous sont fournies par l'expérience sensible[8]. Mais serons-nous pour cela beaucoup plus

1. *Méditations*, V, 2.

2. *Réponses aux 5mes objections*, 55. Éd. Cousin, p. 320. « Je ne demeure « pas d'accord que les idées de ces figures nous soient jamais tombées sous « les sens : car encore qu'il n'y ait point de doute qu'il y en puisse avoir « dans le monde de telles que les géomètres les considèrent, je nie pour- « tant qu'il y en ait aucunes autour de nous... »

3. Voir la note précédente, Cf. *Réponses aux Instances*, Lettre de Descartes à Clerselier, 16 Éd. Cousin, p. 313.

4. *Méditations*, III, 10, 11, p. 272... Cf. *Réponses aux 2mes objections*, 59, p. 452. « Par la réalité objective d'une idée, j'entends l'entité ou l'être de « la chose représentée par cette idée, en tant que cette entité est dans « l'idée. » — Cf. aussi *Réponses aux 1res objections*, 3.

5. *Réponses aux 5mes objections*, 53, p. 287. — C'est pour cela que Dieu est nécessaire pour nous assurer de leur vérité, et qu'un athée ne possède pas la vraie science mathématique.

6. Voir *Réponses aux 5mes objections*, 55, p. 319-320.

7. Voir plus haut page 5 et note 5.

8. L'image peut en effet ne pas ressembler en tout à l'objet sensible qu'elle représente. Voir *Dioptrique*, IV, Éd. Cousin, p. 38. « Il n'y a aucunes « images qui doivent en tout ressembler aux objets qu'elles représentent, « mais il suffit qu'elles leur ressemblent en peu de choses ; et souvent « même leur perfection dépend de ce qu'elles ne leur ressemblent pas tant « qu elles pourraient faire... »

avancés? La formation de ces images relativement parfaites pourra-t-elle jamais nous être de quelque utilité? C'est ce qui, au premier abord, n'apparaît nullement avec évidence. Malgré l'insuffisance des textes, essayons cependant d'éclaircir un peu cette difficile question, en nous inspirant des principes de la métaphysique cartésienne.

D'abord, il est certain que l'image sera un précieux moyen de vérification, car nous pourrons à chaque instant contrôler sur elle ce que notre entendement nous présentera comme vrai. Mais l'imagination ne se borne pas à confirmer : elle peut aider l'entendement à apercevoir la vérité, comme je vais essayer de le montrer. Nous avons vu que notre esprit ne crée point les notions mathématiques, qu'il en prend conscience par une sorte d'expérience suprasensible [1], comparée par Descartes à une réminiscence. Dès lors l'observation des objets sensibles ou des figures tracées dans l'imagination, et la contemplation des idées, ne sont pas deux opérations essentiellement distinctes, et l'on conçoit que, loin de se nuire, elles puissent s'associer avec profit. Puisqu'il s'agit de fixer notre attention sur un objet, mieux vaut tourner vers lui toutes nos facultés, d'autant plus qu'elles pourraient, si nous ne le faisions pas, distraire et gêner notre entendement lui-même. Nous ne pouvons pas en effet interrompre quand nous le voulons le travail de notre imagination. Si l'idée n'a pas été produite par une image, c'est elle qui, même malgré nous, en fait naître une [2] ; or cette image, souvent très différente de l'objet sensible qu'elle représente, ne peut que nous induire en erreur. En effet, l'entendement abstrait généralement d'un complexus donné certains caractères qu'il considère seuls, mais qu'on ne trouve pas isolés dans la réalité, et qui, par suite, ne peuvent pas l'être dans une image [3]. L'imagination doit donc à ces caractères

1. La position adoptée par Descartes semble bien être en effet une sorte de réalisme suprasensible. Ainsi, en ce qui concerne l'origine des notions mathématiques, il n'appartient à aucun des deux partis qui sont aujourd'hui à peu près seuls en présence, et il n'admet ni qu'elles viennent de l'expérience, ni qu'elles soient construites *a priori* par l'esprit.

2. En fait, lorsque nous concevons une figure géométrique, nous nous la représentons en même temps par l'imagination. C'est peut-être pour cela que Descartes, lorsqu'il veut dire : prendre conscience de l'idée d'un triangle, emploie souvent le mot « imaginer » (Voir *Méditations*, V, 2, p. 310. — Cf. *Méditations*, III, 6, p. 267). Il est possible aussi qu'il entende par là *excogitare* (Cependant le texte latin porte *imaginari*).

3. Voir *Regulæ*, XII, 82, p. 100 : « Aliter spectandas esse res singulas in

en ajouter d'autres qui souvent, inventés par elle, sont fort peu conformes aux données. Si alors, à son tour, elle réagit sur l'entendement, elle risquera de l'égarer en lui suggérant certaines liaisons d'idées le détournant de l'objet qu'il considère. Aussi l'imagination abandonnée à elle-même ne peut-elle être qu'une cause d'erreur, une entrave au travail de l'entendement. Mais si nous nous servons d'elle volontairement, en en tirant le meilleur parti possible, nous transformerons en secours ce qui était primitivement un danger.

Ainsi l'expérience sensible pourra accompagner l'expérience suprasensible, et nous venons de voir quels avantages en résulteront ; mais elle pourra plus encore : elle pourra la déterminer en attirant notre attention sur certaines idées. C'est qu'en effet nos idées innées ne sont pas toutes actuellement présentes à notre esprit : elles y sont en puissance [1] ; l'image pourra donc être la cause occasionnelle qui les fera passer de la puissance à l'acte. Et cela sera vrai surtout de nos idées des natures composées : ces idées sont en nous à l'état latent comme une infinité [2] de possibles que nous réalisons en en prenant conscience. Mais pour cela un choix est nécessaire, puisque notre esprit est fini ; or l'imagination peut nous aider à faire un choix parmi ces possibles en nous présentant les images de certains d'entre eux. Cependant

« ordine ad cogitationem nostram quam si de iisdem loquamur prout revera « existunt ». Considérons par exemple un corps étendu et figuré : ce corps est en lui-même quelque chose de simple et d'indécomposable, mais pour notre entendement c'est un composé de corporéité, d'étendue et de figure. — Cf. *Regulæ*, XIV, 116, p. 121. « Ipsæ artes Arithmetica et Geometrica « nos hic fallunt. Quis enim Logista numeros suos ab omni subjecto non « modo per intellectum abstractos, sed per imaginationem etiam vere « distinguendos esse non putat ? Quis geometra repugnantibus principiis « objecti sui evidentiam non confundit dum lineas carere latitudine judicat « et superficies profunditate... » Notre erreur vient de ce que nous considérons comme contingente une liaison de natures simples qui est en réalité nécessaire (Voir *Regulæ*, XII, 86). — Cf. *Principes*, I, 62, et *Réponses aux 1res objections*, 12, p. 391. « Nous distinguons quelquefois, par la pen- « sée, une substance de quelqu'un de ses attributs sans lequel néanmoins « il n'est pas possible que nous en ayons une connaissance distincte. »

1. *Réponses aux 3mes objections*, 55, p. 492. « Lorsque je dis que quelque « idée est née avec nous, je n'entends pas qu'elle se présente toujours « à notre pensée, car ainsi il n'y en aurait aucune ; mais j'entends seule- « ment que nous avons en nous-mêmes la faculté de la produire. »

2. Au contraire, quoiqu'il n'en dresse nulle part la liste, Descartes admet probablement que nos idées des natures simples sont en nombre limité.

dant, si dans la pratique les choses se passent ainsi, remarquons qu'il n'y a pas là de nécessité théorique. L'attention, c'est-à-dire la volonté, suffit pour nous faire prendre conscience de toutes les idées qui sont en nous. D'ailleurs, l'imagination ne peut en rien nous aider à connaître toute une classe de natures, celles que Descartes dans les *Regulæ* a appelées intellectuelles [1]. En revanche, c'est elle le plus souvent qui rend actuelles nos idées des natures corporelles [2]; car ces idées ne sont pas en nous formellement, mais éminemment [3].

C'est donc en géométrie surtout qu'il y aura lieu d'employer l'imagination; mais il ne faut pas croire qu'elle soit de nul usage dans la science des nombres, puisque c'est par abstraction seulement qu'on peut distinguer le nombre de la chose nombrée [4]. Aussi verrons-nous Descartes exclure de l'algèbre toute notion non susceptible d'être représentée par une image. Mais il y fut conduit surtout par les besoins de la démonstration, comme j'essaierai de le montrer plus loin.

A quelle conclusion, maintenant, nous conduit cette première partie ? Les notions mathématiques sont connues par l'entendement, qui seul les embrasse dans leur ensemble et pénètre leur nature véritable. L'imagination, au contraire, ne saisit que le côté accessoire et changeant des choses : elle nous donne d'elles une connaissance sinon fausse, du moins incomplète et tronquée. Toutefois, s'il résulte de là que l'imagination, à elle seule, est incapable de créer la science, ce n'est pas une raison pour qu'elle ne contribue pas à cette tâche. Dès maintenant nous voyons que nous devrons, dans certains cas, recourir à elle. D'abord, en la fixant sur l'objet que nous voulons considérer, nous l'empêcherons de s'égarer et de nous gêner ; ensuite et surtout, elle peut nous servir à éveiller en nous certaines idées. Or nous aurons évidemment un immense avantage à l'employer de cette manière, car cela nous permettra de construire une science utile par ses

1. *Regulæ*, XII, 83. Voir plus haut p. 5, note 6.

2. *Regulæ*, XII, 80, p. 99. « Si vero intellectus examinandum aliquid « sibi proponat quod referri possit ad corpus, ejus idea quam distinctis- « sime poterit, in imaginatione est formanda. » — Voir plus haut page 4, note 2. Cf. *Lettre à la princesse Élisabeth* (Éd. Cousin, t. IX, p. 130). « Le « corps, c'est-à-dire l'extension, la figure et le mouvement, se peuvent « connaître par l'entendement seul, mais beaucoup mieux par l'entende- « ment aidé de l'imagination... »

3. *Méditations*, III, 14, p. 279.

4. Voir plus bas pages 25 et sqq.

applications pratiques. Sans doute les notions mathématiques se trouvent dans notre esprit dès l'origine; mais est-ce à ce titre qu'elles nous intéressent, ou n'est-ce pas plutôt parce qu'elles sont réalisées dans le monde où nous vivons? Descartes ne voit pas encore dans l'étude des mathématiques, comme on le fait aujourd'hui, un moyen de connaître la nature de l'esprit humain : il cherche seulement en elles l'explication de l'univers que nous représentent nos sens. Dès lors, le point de départ de cette science est la substitution d'idées claires et distinctes aux données confuses des sens : or, n'est-ce pas par l'intermédiaire de l'imagination que s'opérera cette substitution ? n'est-ce point elle qui posera des problèmes à l'entendement, qui le déterminera à prendre conscience de telle idée plutôt que de telle autre ? Le mathématicien aura donc souvent recours à l'imagination, mais il ne devra le faire, cependant, qu'avec précaution ; certaines images lui coûtent en effet, lorsqu'il veut se les représenter, un grand effort d'esprit ; ainsi il est pratiquement impossible d'imaginer un chiliogone. Il conviendra par suite, d'observer toujours une juste mesure, de se servir d'images, mais d'images très simples, afin d'aider l'entendement au lieu d'entraver son action. C'est sur ce principe, nous le verrons plus loin, que repose l'algèbre cartésienne.

DEUXIÈME PARTIE

La démonstration mathématique.

I

Jusqu'ici je me suis occupé seulement de la connaissance immédiate des notions mathématiques, par laquelle nous prenons conscience des premiers principes ; il me reste à examiner la connaissance médiate. Il y a en effet des idées dont nous n'apercevons pas le lien directement par intuition ; nous recourons alors à des intermédiaires, et nous faisons une déduction. Demandons-nous donc quel sera le rôle de l'imagination dans la déduction.

Au premier abord, ce rôle ne paraît pas avoir plus d'importance ici que dans la connaissance intuitive. Non seulement, dit Descartes, nous pouvons concevoir un triangle sans le secours de l'imagination et des sens, mais nous pouvons sans eux démontrer toutes les propriétés de ce triangle [1]. Nous devons suivre, il est vrai, pour les démontrer, une voie indirecte, mais sans sortir pour cela du domaine de l'entendement.

Cependant n'oublions pas que la démonstration doit être avant tout une méthode pratique, la plus commode et la plus rapide. Or, rien ne nous force à employer dans la pratique la méthode la plus naturelle à notre esprit, celle qu'il emploierait s'il n'était pas

1. Voir en particulier *Méditations*, V, 2. « Comme il paraît de ce qu'on « peut démontrer diverses propriétés de ce triangle, à savoir que ses trois « angles sont égaux à deux droits, etc.,... lesquelles je reconnais très claire- « ment et très évidemment être en lui. » Et Descartes entend dire que ces démonstrations sont l'œuvre de l'entendement, car il ajoute : « Et je n'ai « que faire ici de m'objecter que peut-être cette idée du triangle est venue « en mon esprit par l'entremise de mes sens ».

uni à un corps. Une science qui s'en tiendrait à une telle méthode serait au contraire imparfaite, car l'art doit suppléer à ce qui manque à l'esprit de l'homme [1]. Aussi, comme le dira un de ses commentateurs [2], ce que Descartes veut nous donner surtout, ce n'est pas *naturalis ingenii facultas aut industria*, mais *ars certis legibus et præceptis contenta*. Pourquoi alors ne ferait-il pas appel à toutes nos facultés, et en particulier à l'imagination?

On conçoit donc que celle-ci puisse quelquefois servir d'auxiliaire à l'entendement dans la démonstration mathématique; mais ici encore il faut se demander si son rôle se bornera là.

Le raisonnement déductif, on l'a vu, n'est pas immédiat : il se fait dans le temps ; mais alors ne suppose-t-il pas l'intervention de la mémoire, et celle-ci n'est-elle pas présentée dans les *Regulæ* comme l'imagination elle-même? Sur le premier point, il n'est guère permis de douter. Descartes nous dit positivement que la déduction, au lieu d'avoir besoin, comme l'intuition, d'une évidence présente, emprunte en quelque sorte sa certitude à la mémoire [3]. Toutefois, l'intervention de la mémoire n'est pas théoriquement indispensable ; elle devient inutile si, pour lier deux idées entre elles, on parcourt par la pensée une chaîne continue d'autres idées [4] : car on arrive alors à embrasser comme d'un seul coup d'œil la démonstration tout entière; la déduction se trouve résolue en une série ininterrompue d'intuitions. La mémoire joue alors un rôle presque nul, mais il n'en est pas de même de l'imagination proprement dite : ce mouvement continu de la pensée est en réalité le plus souvent, sinon toujours, un mouvement de l'imagination, et Descartes l'appelle ainsi dans plusieurs passages des *Regulæ* [5]. Pour que la déduction fût faite par l'entendement

1. *Regulæ*, XII, 79, p. 98. « Facile colliget attentus lector,... quousque « hominum industria ad supplendos ingenii defectus possit extendi. »

2. Erasmius Bartholinus, dans son *Epistola Dedicatoria*. Édition latine de la *Géométrie*, t. I, p. 3. Et, ajoute-t-il, la méthode mathématique des anciens, qui procédait par analyse et synthèse, était mauvaise précisément parce qu'elle n'était pas un art, mais en quelque sorte la faculté naturelle de l'esprit humain.

3. *Regulæ*, III, 15, p. 64: « ad hanc non necesseria est præsens evidentia « qualis ad intuitum, sed potius a memoria certitudinem suam quodammodo « mutuatur ». Cf. *Regulæ*, XI, 67, p. 92 : « Ejus certitudo quodammodo « a memoria dependet ».

4. Voir *Regulæ*, VII. Cf. *Regulæ*, XI, 67.

5. Voir par exemple *Regulæ*, VII, 34. Éd. Garnier p. 77. « Illas continuo « quodam imaginationis motu, percurram. » Dans ce passage et dans

seul, il faudrait que, ramenée à une seule intuition, elle fût tout à fait instantanée. Or c'est là une limite qu'on n'atteint jamais, mais dont cependant on peut se rapprocher indéfiniment ; alors on n'a plus besoin, pour déduire, que de souvenirs conservés pendant un temps infiniment court, c'est-à-dire d'images [1] s'effaçant aussitôt après leur formation, qui par suite n'appartiennent plus à la mémoire, mais n'en dépendent pas moins de l'imagination.

La conclusion à laquelle conduit l'étude des *Regulæ* et des *Méditations*, semble donc être la suivante : l'imagination intervient toujours en fait dans la déduction, parce que cette opération, se distinguant en cela de l'intuition, se fait dans un temps aussi court que l'on veut, sans doute, mais jamais nul. Là est peut-être le point essentiel de la question. En effet, quoique Descartes n'ait donné nulle part une définition permettant de distinguer nettement les domaines de l'entendement et de l'imagination, on peut, je crois, ramener à un seul tous les caractères attribués par lui à cette dernière faculté, en disant qu'elle agit dans le temps, et que l'entendement au contraire agit hors du temps. Cette interprétation s'accorde fort bien avec la doctrine rapportée plus haut. Elle explique, en effet, que l'action de l'imagination demande à l'esprit une certaine contention [2], parce qu'elle se prolonge, au lieu que celle de l'entendement, instantanée, s'accomplit sans effort dès que nous le voulons. Elle explique surtout pourquoi cette faculté nous fait connaître seulement le côté changeant des choses [3], marque du temps qui s'écoule, et non leur vraie et immuable nature. Elle explique enfin comment le mouvement continu de la pensée dont il est question dans les *Regulæ* est un mouvement de l'imagination : le terme mouvement implique en effet un progrès dans le temps, et ne peut pas s'appliquer à l'entendement.

On le voit, tout ce que Descartes nous dit de l'imagination s'enchaîne parfaitement si on la définit à l'aide de la notion de temps, comme je viens de le faire. On objectera peut-être que cette définition ne se trouve pas expressément dans les *Médita-*

d'autres Descartes semble employer indifféremment les mots cogitatio et imaginatio. Il faut se rappeler que cogitatio, que je traduis par pensée, ne désigne pas l'entendement seul, mais l'ensemble des opérations de l'esprit.

1. Tout souvenir étant, d'après les *Regulæ*, une image gravée et conservée dans le cerveau, réciproquement on peut dire que l'image est la limite vers laquelle tend le souvenir, lorsqu'on diminue indéfiniment sa durée.

2. Voir plus haut, page 6.

3. Voir plus haut, page 7.

tions. Mais cela vient de ce que Descartes, placé, comme je l'étais dans la première partie de ce travail, au point de vue de l'intuition instantanée, n'avait pas à parler du temps. De plus, lorsqu'il oppose l'imagination à l'entendement, il ne raisonne pas *a priori* en s'appuyant sur la différence de nature de ces deux facultés, mais *a posteriori* par l'exemple du morceau de cire et d'autres analogues.

Une objection beaucoup plus sérieuse est celle qu'on pourrait tirer de certaines lettres de Descartes, d'après lesquelles nous aurions à notre disposition une mémoire intellectuelle indépendante de notre corps. Ne pourrons-nous pas alors, en effet, déduire sans le secours de l'imagination ? — Si telle était la pensée de Descartes, il faudrait reconnaître en tout cas qu'elle serait à peu près en contradiction avec la doctrine exposée dans les *Regulæ* et dans tous les ouvrages dogmatiques du philosophe, où nulle part il n'est question de la mémoire intellectuelle. Aussi est-il fort difficile de savoir au juste comment il se représente cette mémoire, et, ainsi que j'essaye de le montrer en note[1], les

1. Comme cette question se rattache directement à mon sujet, je vais essayer d'établir brièvement jusqu'à quel point, selon Descartes, la mémoire est dépendante ou indépendante de l'imagination. — Dans tous ses ouvrages dogmatiques, il nous la présente comme une partie du corps. Il est très affirmatif en particulier dans la 12e Règle, où il la considère comme l'imagination dans laquelle certaines images s'impriment d'une façon durable, et dans le *Traité de l'Homme* (Éd. Cousin, p. 395) : « Il faut que je « vous fasse ici considérer tout ce qui se fait de plus remarquable dans le « cerveau pendant le temps de la veille, à savoir comment s'y forment les « idées des objets dans le lieu destiné par l'imagination et le sens commun, « comment elles se réservent dans la mémoire... ». Mais il est certain qu'il a souvent changé d'opinion sur cette question, car il attribue à la mémoire dans le cerveau tantôt une place, tantôt une autre. D'après les *Regulæ*, en effet, la mémoire a le même siège que l'imagination ; selon le *Traité de l'Homme*, au contraire (Éd. Cousin, p. 398), elle serait localisée dans une certaine glande B, tandis que le siège de l'imagination serait une autre glande H. Ailleurs, Descartes déclare que la mémoire réside dans le cerveau tout entier, et même aussi dans les nerfs et dans les muscles, « en sorte que, « par exemple, un joueur de luth a une partie de sa mémoire dans ses « mains ». (Voir *Correspondance*, Descartes à Meyssonier, 29 janvier 1640. Éd. Cerf, t. III, p. 20. — Descartes à Mersenne, 1er Avril 1640. Éd. Cerf, t. III, p. 48). — Voici maintenant les textes où il est question de la mémoire intellectuelle : 1° lettre à Mersenne : 1er Avril 1640. Éd. Cerf, t. III, p. 48 : « Mais outre cette mémoire qui dépend du cors, j'en reconnois encore « une autre, du tout intellectuelle qui ne dépend que de l'âme seule » ;

lettres auxquelles je fais allusion n'empêchent nullement de croire qu'elle est, selon lui, insuffisante en pratique, et qu'elle doit être associée à la mémoire corporelle. Celle-ci est comme un livre où sont gravées toutes les images perçues autrefois par nous, et où l'entendement peut lire librement. Il aura alors, évidemment, avantage à s'en servir, d'autant plus qu'il n'a en lui rien d'équivalent. Il possède bien la faculté de conserver des idées, mais il ne les localise pas dans le passé, puisqu'il ne les considère pas dans le temps ; rien, à son point de vue, ne distingue un souvenir d'une perception actuelle, surtout s'il s'agit de notions mathématiques : celles-ci, en effet, innées en nous, sont toujours présentes à notre esprit, et ne lui apparaissent jamais comme appartenant au passé. La mémoire intellectuelle peut être comparée à un magasin où ces notions sont toutes

2° Lettre à Mersenne : 11 Juin 1640. Éd. Cerf, t. III, p. 84 : « Il n'y a « point de doute que les plis de la mémoire s'empêchent les uns des « autres et qu'on ne peut pas avoir une infinité de tels plis dans le cerveau ; « mais on ne laisse pas d'y en avoir plusieurs, et la mémoire intellectuelle « a ses espèces à part qui ne dépendent nullement de ces plis » ; 3° lettre à Mersenne : 6 août 1640. Éd. Cerf, t. III, p. 143 : « Je ne crois pas que les « plis de la mémoire doivent être en fort grand nombre pour servir à toutes « nos souvenances à cause qu'un même pli se rapporte à toutes les choses « qui se ressemblent, et qu'outre la mémoire corporelle... je juge qu'il y a « encore en notre entendement une autre sorte de mémoire qui est tout à « fait spirituelle et ne se trouve point dans les bêtes ; et que c'est d'elle « principalement que nous nous servons ». Comment concilier toutes ces assertions ? Peut-être le *Traité de l'Homme*, un des derniers ouvrages de Descartes, nous donne-t-il sa doctrine définitive : mais remarquons que cet ouvrage, tout en donnant à la mémoire la glande B comme siège principal, ne contredit pas les lettres de 1640. En somme, si nous regardons dans quelles circonstances, et pour répondre à quelles objections ces lettres ont été écrites, nous voyons bien quelle a été la marche de l'esprit de Descartes. Il veut d'abord localiser la mémoire dans une petite partie du cerveau ; puis, ne pouvant expliquer comment un très grand nombre d'images peuvent être conservées dans un espace aussi étroit, il la fait résider dans le cerveau tout entier, dans les nerfs et les muscles, et finalement lui adjoint une seconde mémoire, la mémoire intellectuelle, de laquelle, dit-il, nous nous servons le plus souvent. La mémoire corporelle n'est plus guère alors que l'habitude d'exécuter certains mouvements ; pour le joueur de luth, par exemple, de remuer ses mains d'une certaine manière. C'est d'elle, par suite, que nous devrons nous servir si nous voulons nous rappeler une action accomplie par nous, une démonstration que nous avons faite, et non simplement retrouver des idées isolées.

sur le même plan, à notre disposition. Au contraire, la mémoire corporelle, présentée souvent par Descartes comme une mémoire organique, conserve avant tout l'ordre des images : elle nous fait revivre notre vie passée. Or une démonstration, faite par nous suivant des procédés qui nous sont dictés par notre constitution, devient une partie de notre vie. C'est donc surtout de ma mémoire corporelle que je dois me servir pour démontrer. Ainsi, j'aurai à ma disposition, non pas un tableau de toutes les idées dont je puis disposer à un moment ou à un autre, ce qui actuellement ne me serait d'aucun usage, mais un ensemble de points de repère me rappelant à chaque instant où j'en suis, et quel chemin j'ai déjà parcouru.

Ainsi, malgré l'existence de la mémoire intellectuelle, l'imagination aura un rôle important dans la démonstration. Mais elle sera surtout d'un grand usage lorsqu'il s'agira de résoudre un problème non plus par une simple déduction, mais par plusieurs déductions sans lien entre elles dont il faudra ensuite coordonner les résultats après en avoir fait une énumération complète [1]. La mémoire en effet, sous une forme ou sous une autre, sera alors plus indispensable que jamais pour nous permettre, une fois les différents points de la démonstation acquis, de les considérer à nouveau en les rapprochant, afin d'en faire sortir la solution générale cherchée : nous aurons besoin d'elle aussi, dans ce cas, pour conserver les données du problème proposé, si nous ne nous servons pas au début de toutes ces données : nous risquerions en effet de les oublier, si nous n'avions pas sans cesse présente à l'esprit l'image de l'objet sur lequel nous raisonnons, qui nous les représente toutes à chaque instant [2]. Mais ces démonstrations comprenant plusieurs parties indépendantes exigent de l'esprit, par suite du rôle qu'y joue la mémoire,

1. Descartes désigne par énumération ou induction deux opérations très différentes qu'il ne faut pas confondre (*Regulæ*, VII) : celle par laquelle notre pensée parcourt d'un mouvement continu les chaînons successifs d'une déduction, et celle qui consiste à décomposer une question en plusieurs autres, c'est-à-dire illatio ex multis et disjunctis rebus collecta (*Regulæ*, XI, 66, Éd. Garnier, p. 92). C'est de cette dernière opération qu'il est ici question.

2. Voir *Regulæ*, XIV, 116, Éd. Garnier, p. 120. « Etiamsi intellectus « præcise tantum attendat ad illud quod verbo designatur, imaginatio « tamen veram rei ideam fingere debet, ut ad ejus alias conditiones voca- « bulo non expressas, si quando usus exigat, idem intellectus possit « converti, nec illas unquam imprudenter judicet fuisse exclusas. »

un plus grand effort que les autres, et nous verrons Descartes s'attacher à les éviter le plus possible.

Je viens de montrer brièvement quel est le rôle attribué à l'imagination par la logique cartésienne ; le moment est venu maintenant d'éprouver les conclusions auxquelles je suis arrivé en voyant si elles expliquent l'œuvre mathématique de Descartes.

II

Si nous considérons l'ensemble de ses travaux scientifiques, nous voyons Descartes préoccupé principalement d'éliminer toute notion s'adressant à l'imagination, et cela en ramenant toutes les sciences à la mathématique [1] qui, malgré les restrictions que nous aurons à faire dans la suite, est plus que toute autre du domaine de l'entendement pur. C'est ainsi qu'il s'est proposé de résoudre autant que possible par la géométrie et l'algèbre les problèmes de mécanique et de physique. Il est vrai, — et M. Liard insiste sur ce point, — qu'il ne fait pas fi tout à fait de l'expérience [2], même dans la physique générale ou théorique; mais

1. Il s'agit ici, bien entendu, de ce que Descartes a eu l'intention de faire, et non de ce qu'il a fait en réalité, car il est certain que sur ce point il a promis plus qu'il n'a tenu. Si dans sa physique il applique sa méthode au sens large du mot, il est loin, du moins, d'avoir effectivement réduit cette science aux mathématiques. Tout au plus a-t-il recours, dans ses recherches sur la musique et dans la *Dioptrique*, à l'arithmétique et à la géométrie anciennes : mais l'analyse en est à peu près absente. C'est plutôt dans la mécanique de Descartes qu'elle tient une place, encore modeste d'ailleurs, comme on pourrait le prouver par d'assez nombreux exemples empruntés à la *Correspondance*. Ainsi, pour n'en citer qu'un, dans une lettre à Huygens du 18 février 1643 (Éd. Cerf., t. III, p. 628-629), Descartes déclare lui-même s'être servi de l'algèbre dans la solution de ce curieux problème : Étudier le mouvement d'une fourmi marchant sur un bâton qu'on hausse pendant ce temps avec une vitesse égale à celle dont est animée la fourmi.

2. Liard, *Descartes*, liv. I, chap. 4. M. Liard cite à l'appui de sa thèse un grand nombre de textes auxquels on pourrait ajouter le passage suivant d'une lettre à Mersenne du 30 août 1640 (Éd. Cerf., t. III, p. 173) : « Talia « sunt ea quæ scripsi ut quum non aliis quam Mathematicis rationibus « aut certa experientia nitantur nihil falsi possint continere ».

sommes-nous bien sûrs qu'il s'en servirait encore si cette science avait atteint un plus haut degré de perfection? Il est vrai aussi que Descartes a écrit quelque part : « Mais d'exiger de moi des démonstrations géométriques dans une matière qui dépend de la physique, c'est vouloir que je fasse des choses impossibles [1] ». Mais il veut peut-être parler d'une impossibilité pratique, et d'ailleurs, dans d'autres textes très précis, il déclare que sa physique n'est que géométrie [2]. On a donc le droit de dire que dans les sciences expérimentales Descartes eut pour but principal de diminuer le rôle de l'imagination. Ne doit-on pas alors supposer qu'allant plus loin dans cette voie il l'a éliminée aussi des mathématiques, et n'est-ce pas ainsi qu'on doit interpréter ses réformes en géométrie?

Que telle soit la tendance générale de Descartes, on ne peut pas en douter, puisque ce qu'il reproche à la méthode géométrique employée avant lui, c'est précisément de trop fatiguer l'imagination [3]. Essayons, bien que sur ce point Descartes lui-

1. *Descartes à Mersenne*, 27 mai 1638, Éd. Cerf, t. II, p. 142. Et il ajoute : « Car on se contente en telles manières que les auteurs, ayant présupposé « certaines choses qui ne sont pas manifestement contraires à l'expérience, « aient au reste parlé conséquemment ». Si le physicien était forcé de partir d'hypothèses vraies, il ne pourrait pas se passer de l'imagination ; mais il peut partir d'hypothèses fausses, à condition qu'il aboutisse à des conclusions s'accordant avec n'importe quelle hypothèse. — Cf. *Dioptrique*, Disc. I, Éd. Cousin, pp. 5, 6; et *Lettre à Morin* du 13 juillet 1638. Éd. Cerf, t. II, p. 197.

2. Cela est possible, car tout s'explique par la figure et le mouvement. Voir *Lettre à Mersenne*, 27 juillet 1638, Éd. Cerf, t. II, p. 268. — Cf. *Lettres à Mersenne* des 1er mars 1638, 11 mars 1640, 30 août 1640. Éd. Cerf, t. II, p. 31, et t. III, p. 39, 73. — Cf. aussi *Principes*, IV, 188.

3. *Méthode*, II. — Cf. *Regulæ*, IV, 21, Éd. Garnier, p. 68 : « Nihil inanius « est quam superficiariis istis demonstrationibus, quæ casu sæpius quam « arte inveniuntur et magis ad oculos et imaginationem pertinent quam « ad intellectum, sic incubare... » — Dans le *Manuscrit de Göttingen*, p. 49, on lit : « Quod autem quidam in Mathesi ingeniosi qui tamen in physicis « rebus et similibus infeliciores sunt, non contingit ex defectu ratiocinii, « sed inde quod mathesin tractarint non ratiocinando, sed imaginando et « omnia egerint per imaginationem ; quæ cum in Physica locum non habeat, « hinc contingit quod adeo in Physica sint infelices ». Ainsi, d'après ce texte, l'imagination tiendrait dans la Géométrie ancienne une place plus grande que celle qu'elle peut avoir en physique ; bien entendu, il doit être question ici de la physique mathématique, considérée au point de vue de ses procédés et non de son objet.

même nous donne peu d'indications, de nous expliquer ce reproche.

D'abord la géométrie ancienne fait appel à un grand nombre d'images dans les définitions élémentaires. Ainsi elle a recours pour définir l'égalité de deux figures au concept de superposition, c'est-à-dire à la considération d'un déplacement qui s'effectue dans l'espace et dans le temps, et que par suite notre imagination seule peut se représenter.

Mais c'est surtout dans les raisonnements des anciens qu'intervient l'imagination. Sans doute la démonstration — sans cela elle n'aurait aucune valeur — est toujours faite par l'entendement seul qui lie entre elles certaines idées au moyen d'intuitions. Mais chez les Grecs, qui résolvent tous les problèmes à l'aide de constructions géométriques, elle est astreinte à la considération de la figure, et se laisse diriger par l'imagination.

La preuve en est que leur méthode n'a pas une généralité absolue. Nous pouvons, en effet, raisonner ici comme nous l'avons fait à propos du morceau de cire. Si la même démonstration ne s'applique pas telle quelle et sans modification aucune à tous les cas particuliers, c'est qu'elle n'est pas l'œuvre de l'entendement seul. Or, les démonstrations des anciens sur le triangle, par exemple, s'appliquent, il est vrai, à une infinité de triangles sensibles [1], mais non pas à tous les cas de figure. Si dans un problème ils ont à considérer deux droites, les Grecs doivent distinguer et traiter séparément les cas où ces droites se coupent, sont parallèles ou coïncident. Ainsi la méthode à employer varie lorsque la figure étudiée change de forme tout en restant la même pour l'entendement ; elle varie surtout quand on passe d'un problème à un autre. Tout cela indique qu'elle n'est pas indépendante de l'imagination.

On voit d'ailleurs facilement où intervient cette faculté. Comment, en effet, procède le géomètre grec? Après les avoir fixées dans son imagination, en traçant une figure, il ne tient plus compte de toutes les données : mais il considère à part certaines

1. Notre imagination peut en effet, par abstraction, se représenter un triangle plus parfait et plus général que ceux que nous rencontrons dans la nature. Voir plus haut page 8, note 8. D'ailleurs une démonstration faite sur une figure particulière s'appliquera à toutes les figures de même forme si nous ne nous sommes pas appuyés sur des propriétés particulières à cette figure ; mais il n'en est plus de même si la figure change de forme tout en conservant la même nature.

lignes particulières qu'il choisit arbitrairement ; au lieu d'aborder la question de front, il porte toute son attention sur une certaine bissectrice, une médiane ou un angle. Or, n'est-ce pas son imagination qui le conduit à prendre le problème par tel ou tel bout, à faire telle construction plutôt que telle autre ?

L'entendement, lui, ne divise pas ainsi une question[1] : pour lui chaque notion est une et indivisible ; il embrasse tout le donné dans une seule intuition. C'est ainsi qu'il peut concevoir un chiliogone aussi facilement qu'un triangle, et il le conçoit tout entier et tout à la fois[2]. Mais si, ayant à raisonner sur un triangle, il s'attache à l'idée d'une hauteur ou d'une médiane particulière, il sera obligé de recourir à l'imagination pour la rapporter au triangle complet auquel elle appartient[3].

Ainsi la méthode des anciens réclame à chaque instant le secours de l'imagination ; mais, pour cette raison, elle fatigue l'esprit en exigeant de lui une trop grande contention. Il faut en chercher une autre s'adressant, autant que possible, à l'entendement seul.

Pour cela, nous devons trouver un moyen d'embrasser à la fois toutes les données d'un problème, et d'en déduire la solution par une marche sûre et, s'il est possible, toujours pareille. Nous devons éviter aussi d'introduire trop d'images dans nos premières définitions. Or, si l'on veut que l'entendement ait une vue nette des choses sans le secours de l'imagination, il faut, lorsqu'on le peut, substituer aux natures simples qui sont en nous éminem-

1. Lorsque Descartes nous dit dans le *Discours de la Méthode* qu'il faut diviser la difficulté, il nous donne probablement une règle pratique ; c'est parce que j'ai une imagination que mon esprit, fini, doit recourir à l'analyse, dont un entendement pur pourrait se dispenser ; mais, il le dit lui-même, il ne faut pas abuser de ce moyen ; on doit s'en servir seulement autant que cela est requis pour résoudre une question. On le voit, la méthode exposée par Descartes n'est pas celle que suivrait la science parfaite, mais celle qui est pour l'homme la plus avantageuse : je reviendrai plus loin sur ce sujet. Voir page 34.

2. Voir *Réponses aux 5mes objections*, 58, Éd. Cousin, p. 293. « Pour ce « qui est de l'intellection d'un chiliogone... il est très certain que nous le « concevons très clairement tout entier et tout à la fois, quoique nous ne « le puissions pas ainsi clairement imaginer. » — Au contraire si nous imaginons un pentagone, nous ne le considérons pas tout à la fois ni en lui-même, « mais nous portons notre attention d'une part sur ses cinq « côtés, d'autre part sur l'aire ou l'espace qu'ils renferment » (*Méditations*, VI, 2, Éd. Cousin, p. 323).

3. Voir page 18, note 2.

ment, celles qui y sont formellement [1]. Il faut donc, autant que possible, dans les définitions et les démonstrations, ramener la notion de qualité à celle de quantité [2]. Ainsi nous définirons les rapports de grandeur sans parler de superposition, suivant en cela la voie déjà ouverte par les Grecs ; mais pourrons-nous de même exprimer par des nombres les rapports de position ? Oui, grâce à la géométrie analytique créée par Descartes. La situation d'un point dans le plan est en effet entièrement déterminée par deux coordonnées, par exemple par ses distances à deux droites fixes, à condition que l'on affecte ces distances de signes convenables. Dès lors, on peut à tout système de deux nombres faire correspondre un point du plan et réciproquement, en sorte qu'une courbe plane quelconque sera représentée par une équation entre les deux coordonnées de ses points. Ainsi j'aurai un moyen de considérer en bloc toutes les propriétés d'une courbe ; il suffira de me donner son équation. Soient par exemple les propriétés de la tangente au cercle : le seul fait que je me donne un cercle au tableau ne peut évidemment rien m'apprendre sur une tangente qui n'est même pas tracée ; au contraire ces propriétés sont contenues, enveloppées dans l'équation du cercle, comme elles le sont dans l'idée elle-même, et, je puis les en faire sortir mécaniquement pour ainsi dire, sans rien inventer ni créer. La démonstration sera ainsi ramenée à de simples transformations d'équations, et tous les problèmes se résoudront à peu près de la même manière. De plus, la nouvelle méthode ne sera plus astreinte à la considération des cas de figure, car rien ne distinguera plus ces cas : au point de vue analytique, il n'y pas de différence entre deux droites concourantes, parallèles ou confondues. Ainsi se trouvera à peu près réalisée cette généralité absolue des démonstrations, qui est la marque du travail de l'entendement.

Dans la géométrie analytique ainsi constituée les raisonnements ne portent que sur des quantités ; mais ne nous représenterons-nous pas encore ces quantités sous forme d'images, comme des figures dont les éléments satisfont à certains rapports numériques ? Sans doute ces figures ne sont que la forme des rapports que nous étudions ; mais pourrons-nous empêcher cette forme de jouer un rôle dans la démonstration ? Ne sera-ce pas elle au contraire qui, même malgré nous, sera notre fil conduc-

1. Voir plus haut page 11.
2. *Regulæ*, IV, 21.

teur, et nous déterminera à transformer nos équations d'une manière ou d'une autre, suivant qu'elles représenteront telles ou telles courbes ? Ne serons-nous pas obligés surtout de recourir à elle pour traduire en relations algébriques les premiers axiomes de la géométrie ?

Pour éliminer complètement l'imagination, il faut faire un pas de plus. Après avoir présenté la qualité comme un simple accident sans intérêt de la quantité, il faut en débarrasser complètement les notions mathématiques. Il faut constituer une science des grandeurs en général à laquelle on ramènera toutes les autres sciences. On a accompli un premier progrès en créant la géométrie analytique, la physique et la mécanique mathématiques : il s'agit maintenant d'aller plus loin encore et de créer la mathématique universelle. Cette science aura pour objet la grandeur abstraite (mais non acquise par abstraction), susceptible de recevoir toutes les déterminations particulières, et qui, par suite, n'en a aucune, c'est-à-dire l'idée de la quantité, dépourvue de toute figure permettant à l'imagination de se la représenter. Cette faculté n'aura définitivement plus rien à voir avec les mathématiques.

Descartes a-t-il été jusque-là ? Est-ce bien ainsi qu'il a conçu cette science universelle dont il est question dans les *Regulæ*[1] ? Je ne le crois pas, et je vais dire pour quelles raisons ; mais on peut affirmer dans tous les cas que si Descartes n'a pas créé une science des grandeurs en général, c'est qu'il n'a pas jugé la chose possible. Une telle science, œuvre de l'entendement pur, eût été en effet pour lui la science parfaite, et nul doute qu'il n'ait cherché à en approcher le plus possible. Mais la logique nous a fait prévoir que le mathématicien rencontrerait de grandes difficultés s'il voulait se passer du secours de l'imagination ; si donc ces prévisions sont réalisées, c'est-à-dire s'il est pratiquement impossible de raisonner sur des quantités pures, si l'entendement humain ne peut pas, en fait, se placer dans les mêmes conditions qu'un entendement non uni à un corps, mieux

1. *Regulæ*, IV, 21. Éd. Garnier, p. 70 : « Quod attentius consideranti « tandem innotuit illa omnia tantum in quibus ordo vel mensura examina- « tur ad Mathesin referri, nec interesse utrum in numeris, vel figuris... « aliove quovis objecto talis mensura quærenda sit ; ac proinde generalem « quandam esse debere scientiam, quæ id omne explicet quod circa ordinem « et mensuram nulli speciali materiæ addicta quæri potest, eamdemque... « Mathesin universalem nominari ».

vaut prendre le parti de ne pas repousser l'imagination, et s'en servir utilement : c'est un instrument qui s'impose à nous, sans doute, mais dont nous ne devons pas chercher à nous passer. C'est à ce titre, comme j'essayerai de le montrer, qu'elle aura un rôle dans la mathématique universelle de Descartes.

III

Est-il possible de raisonner sur des quantités absolument nues, c'est-à-dire sur des quantités qui n'aient aucune réalité concrète ? Il semble, au premier abord, que les nombres arithmétiques répondent à cette condition ; mais ce n'est qu'une apparence. En effet, s'ils y répondaient, ils seraient évidemment susceptibles de revêtir toutes les formes ; or, l'arithmétique ne s'applique pas à toutes les grandeurs existantes, mais seulement aux grandeurs discontinues. Donc les nombres offrent encore une prise à l'imagination [1].

Mais les quantités algébriques ne sont-elles pas précisément ce que nous cherchons, et l'analyse de Viète n'est-elle pas la science des grandeurs en général dont a besoin Descartes ? Si cette analyse a un caractère général, remarquons toutefois qu'elle est née de l'étude des grandeurs particulières. Il y avait à l'origine deux algèbres, dont l'une était une simple généralisation de l'arithmétique, et l'autre une méthode d'analyse encore toute géométrique. Viète, un des premiers, eut l'idée de fondre en une seule ces deux sciences nouvelles, et en cela Descartes ne fit que le répéter, apportant cependant à sa méthode de nombreux perfectionnements [2]. Mais tous deux, voulant ériger

1. Voir *Regulæ*, XIV, 116. Éd. Garnier, p. 121 : « Si de numero est « quæstio, imaginemur subjectum aliquod per multas unitates mensura- « bile;... cavebimus ne inde postea aliquid concludamus, in quo res nume- « rata a nostro conceptu exclusa fuisse supponatur ; sicuti faciunt illi qui « numeris mira tribuunt mysteria, et meras nuges quibus certe non tantam « adhiberent fidem nisi numerum a rebus numeratis distinctum esse con- « ciperent ». — Descartes a d'ailleurs un profond mépris pour l'arithmétique, qu'il traite plutôt comme un jeu de patience que comme une véritable science. Voir en particulier *Lettre à Mersenne*, du 31 mars 1638. Éd. Cerf, t. II, p. 91.

2. Voir Appendice I.

l'algèbre en science autonome, devaient se heurter à de graves difficultés, s'ils cherchaient à en établir les premières propositions. Puisqu'il y a pétition de principe à vouloir tout démontrer, puisque toute science suppose un point de départ obtenu par une autre voie que le raisonnement, l'entendement ne va-t-il pas être obligé, dès le début, d'appeler une autre faculté à son secours ? Il ne peut pas, en effet, trouver directement les axiomes au moyen de l'intuition, son seul instrument de découverte : car il doit pour cela partir de termes, qu'il ne saurait choisir seul, nous l'avons vu [1], dans un monde infini d'idées, toutes sur le même plan, et également indifférentes à ses yeux. Il semble qu'il n'y ait, au début de l'algèbre, que deux manières de procéder : ou bien on partira de définitions non expliquées, qui ne représenteront rien à l'imagination, et souvent même seront dépourvues de sens pour l'entendement : telles sont les quantités négatives et imaginaires; ces définitions ne seront alors justifiées que dans la suite, si elles fondent une science utile par ses applications; ou bien on se servira de grandeurs particulières pour établir ces principes ; on prendra pour cela les plus générales qu'on connaisse, et on admettra que ce qu'on dit de ces grandeurs s'applique à toutes les autres ; mais rien alors n'empêchera plus l'imagination d'intervenir dans les premières démonstrations de l'algèbre.

De ces deux méthodes, laquelle emploie Viète ? Il recommande souvent de représenter les quantités algébriques par des lignes ou des surfaces géométriques ; mais il ne peut pas se servir de cette interprétation pour établir les règles de son algèbre, car elle n'est plus possible pour lui à partir de la quatrième puissance [2]. Procède-t-il alors par définition ? Quelquefois ; mais en réalité il semble avoir la prétention de démontrer directement toutes les propositions dont il a besoin, et cela en s'appuyant sur certains principes d'aspect métaphysique, comme celui de l'homogénéité [3].

Descartes ne pouvait évidemment pas le suivre dans cette

1. Voir plus haut page 10.

2. Pour Viète, en effet, toute expression du second degré représente une surface plane, toute expression du troisième degré un solide : à partir de la quatrième puissance l'interprétation devient impossible.

3. Ainsi il semble vouloir donner une démonstration complète du principe de l'addition algébrique, ce que depuis longtemps on a renoncé à faire. Voir *Isagoge in Artem Analyticam*. Éd. Elzévir, page 5 : « Quoniam « igitur magnitudo magnitudini addenda est, homogeneæ autem heteroge-

voie. Ce sont ces obscurs principes, rappelant l'ancienne scolastique, qu'il condamne le plus chez Viète. Mais sur quoi reposait alors son algèbre ? Il est difficile de le savoir, car nous ne possédons pas cette algèbre, dont nous ne connaissons que les applications géométriques. Si l'on en croit les commentateurs de Descartes et un opuscule retrouvé en 1896 [1], qui a été écrit sous sa direction pour servir d'introduction à sa géométrie, il semble qu'il ait effectivement réalisé une mathématique universelle se suffisant à elle-même, et où n'intervient la considération d'aucune grandeur particulière. Erasmius Bartholinus [2], en particulier, le déclare formellement, et Descartes, dans son Introduction, ne fait nullement appel à l'intuition géométrique pour éclairer l'algèbre ; il donne toutes les règles sous forme de définitions [3]. Mais c'est là, vraisemblablement, une manière abrégée de présenter les choses. Si, en effet, aujourd'hui, ce mode d'exposition est le plus généralement adopté, parce qu'on s'est vu forcé d'admettre comme postulats

« neas non adficiunt, sunt quæ proponuntur addendæ duæ magnitudines « homogeneæ. Plus autem vel minus non constitunt genera diversa. Quare « nota copulæ seu adjunctionis commode addentur ».

1. *Manuscrit de Hanovre*, catalogué sous le titre de Calcul de Monsieur Descartes, et publié par M. H. Adam (Bulletin des Sciences mathématiques. Septembre 1896). Cet opuscule est probablement de Juillet 1638.

2. Dans son *Epistola Dedicatoria* (Éd. latine de la Géométrie, p. 4), Erasmius Bartholinus oppose la mathématique universelle de Descartes à la Géométrie et à l'Arithmétique, qui ont recours à l'imagination. « Utile « esse atque necessarium ut initio juvetur cogitatio nostra et intellectus ; « unde factum est quod Geometræ figuras, Arithmetici numerorum characteres, aliique alia subsidia invenerint. Sed experimentis ejus modi vix « acquiescere debent magna ingenia nec potest is qui sapientiæ famam « affectat ». Ce grand génie, ce sage, c'est Descartes, qui a vu le premier que « quantitas in *universali et abstracto* per litteras Alphabeti concipi « potest ». (Er. Bartholinus. *Prefatio ad lectorem*. Éd. citée.)

3. « L'addition se fait par le signe +. Comme pour ajouter a à b, j'écris « $a + b$. La soustraction se fait par le signe —. Comme pour soustraire « a de b, j'écris $b - a$. S'il est question de multiplier des lettres l'une par « l'autre, il les faut joindre ensemble ; mais s'il y a des nombres adjoints « ils suivent les lois de l'Arithmétique vulgaire. Et pour les signes..., etc. » Ce sont là des énoncés de propositions à démontrer plutôt que des axiomes ou définitions ; la preuve en est que l'opuscule est rédigé ainsi d'un bout à l'autre, et énonce par exemple sans la justifier la règle d'extraction des racines carrées, ce que ne ferait évidemment pas un traité complet d'algèbre.

bien des principes qu'on prétendait autrefois démontrer, il n'en était pas de même au XVII[e] siècle, et aucun des commentateurs de Descartes ne s'est cru le droit de procéder ainsi [1]. Descartes lui-même ne semble pas attacher une grande importance théorique à l'opuscule de 1638, qui, dit-il, contient seulement « quelques adresses particulières touchant le calcul [2] », et qui d'ailleurs, remarquons-le bien, n'est pas de lui [3]. Il est donc probable qu'il voulait dans cette Introduction énoncer les règles de son algèbre sans dire comment il les avait obtenues, et rien ne nous autorise à ne pas ajouter foi aux nombreux textes des *Regulæ*, où la question se trouve nettement résolue. En face des assertions de cet ouvrage, le témoignage de E. Bartholinus est évidemment de peu de poids.

Nous avons déjà vu Descartes, à propos de l'arithmétique, condamner la science vide des nombres ; or, selon lui, de même qu'il ne faut pas distinguer le nombre de la chose nombrée, de même on doit représenter par des grandeurs concrètes les quantités algébriques [4]. La mathématique universelle portera sur les grandeurs en général, mais elle se servira au moins dans les premières démonstrations de grandeurs particulières comme d'intermédiaires. Et cela est légitime : car rien ne se dit des grandeurs en général qui ne puisse se rapporter à une grandeur quelconque en particulier [5], et la réciproque de cette proposition est vraie.

Ainsi l'algèbre ne se constituera pas en science absolument

1. Voir plus loin page 31, note 1.

2. *Lettre à Mydorge*, du 14 février 1638, cité par M. H. Adam.

3. *Lettre à Mersenne*, 23 août 1638. Éd. Cerf, t. II, p. 332. « Pour l'In-« troduction à ma Géométrie, je vous assure qu'elle n'est nullement de « moi, et je l'ai seulement à peine ouï lire un peu devant que je l'enfer-« masse en mon paquet. » Leibnitz disait de cette Introduction : « Je n'y « remarque rien de cette excellence que M. Baillet dit qu'on lui attribuait, « et qui faisait dire que M. Descartes en était l'auteur lui-même ». (*Remarques sur l'abrégé de la Vie de Monsieur Descartes*. Cité par M. H. Adam.)

4. *Regulæ*, XIV, 116 et sqq. Éd. Garnier p. 119. Cf. *Principes* I, 55, Ed. Cousin, p. 98. « Que l'ordre et la mesure ne diffèrent pas en effet des choses ordonnées et nombrées. » Et *Principes*, II, 8, p. 127.

5. Voir *Méthode*, II, 11. Cf. *Regulæ* XIV, 112, 113 p. 116. « Ut vero ali-« quid imaginemur nec intellectu puro utamur, sed speciebus in phantasia « depictis adjuto, notandum et nihil dici de magnitudinibus in genere quod « non etiam ad quamlibet in specie possit referri. »

autonome. Elle empruntera à d'autres sciences, à la géométrie par exemple, ses définitions et ses premiers principes. L'imagination, qui intervient dans ces sciences, jouera donc aussi un rôle au début de l'algèbre. Mais faut-il en conclure, comme M. Liard, que l'intuition géométrique a dans cette algèbre une place prépondérante, que le but suprême de Descartes est la résolution graphique des équations? [1]. Rien, il me semble, ne permet d'adopter une pareille solution. M. Liard croit l'établir en montrant que la science exposée dans la *Géométrie* de 1637 et que nous prenons pour une géométrie analytique, est en réalité l'algèbre même de Descartes; mais cela même est difficile à prouver [2]. Sans doute les commentaires [3] de cet ouvrage, publiés en particulier par Florimond de Beaune et François Schooten, apparaissent comme de véritables traités d'algèbre ; mais dans leur pensée ces commentaires étaient sans doute, comme le Manuscrit de Hanovre, des introductions à la Géométrie. Sans doute aussi, les questions traitées dans le troisième livre sont bien, comme le dit M. Liard, les articulations successives d'une théorie générale des équations ; mais ce livre est visiblement une parenthèse [4] où Descartes expose certains principes d'algèbre dont il a besoin pour sa géométrie; c'est pour cette raison qu'après avoir traité toutes ces questions sur les équations par de simples transfor-

1. Liard. *Descartes*, p. 63. Cf. aussi p. 51.

2. Voir Liard, *Descartes*, p. 47-63. Que la thèse de M. Liard soit vraie ou fausse, il n'en est pas moins incontestable que les contemporains de Descartes ont été plus frappés de la méthode employée dans la *Géométrie* que des applications géométriques de cette méthode.

3. Ils sont publiés dans l'édition latine déjà citée de la *Géométrie*. Les plus importants sont les *Notæ Breves* et le *De natura æquationum* de Florimond de Beaun ; les *Principia Matheseos* de François Schooten ; le *De Reductione æquationum* de Huddenius.

4. Descartes nous dit (*Lettre à Mersenne*, Déc. 1637. Éd. Cerf, t. I, p. 479), en parlant de cette partie de son ouvrage. « A la page 372 qui est l'endroit « où je commence à donner les règles de mon algèbre. » N'est-ce pas indiquer clairement que dans ce qui précède il n'est pas question d'algèbre ? — D'ailleurs Descartes nous avertit qu'il nous donne cette théorie des équations pour nous éviter des fautes dans la solution de certains problèmes géométriques. (Voir *Géométrie*, Éd. Cousin, pp. 387, 388). Comment alors M. Liard peut-il dire en s'appuyant précisément sur la lettre que je viens de citer : « Ainsi déterminer généralement en toute équation le nombre « des racines, tel a été de son aveu le but de Descartes dans la géométrie » (p. 49) ?

mations algébriques [1], il en donne ensuite l'interprétation géométrique. Ce que M. Liard prend pour la mathématique universelle cartésienne n'en est donc, il semble bien, que l'application. Descartes lui-même le déclare dans une lettre à Ciermans [2], disant qu'il n'a pas traité dans sa géométrie toutes les questions qui devraient entrer dans une mathematica pura. Il l'a montré aussi en donnant en 1638 à cette géométrie une algèbre comme introduction [3].

1. Dans le premier livre, Descartes résout l'équation du second degré au moyen d'une construction géométrique; mais c'est seulement pour montrer que cette construction est possible, car il ajoute : « Au reste ces mêmes « racines se peuvent trouver par une infinité d'autres moyens, et j'ai seule- « ment voulu mettre ceux-ci afin de faire voir qu'on peut construire tous « les problèmes de la géométrie ordinaire sans faire autre chose que le peu « qui est compris dans les quatre figures que j'ai appliquées. » (*Géométrie* Éd. Cousin, t. V, p. 319). — Au contraire, dans la théorie générale des équations, exposée au livre III, Descartes considère une équation comme une somme de termes égale à 0, et non en tant qu'elle représente une courbe. « Il faut que je dise quelque chose en général de la nature des « équations, c'est-à-dire des sommes composées de termes partie connus « et partie inconnus qui considérés tous ensembles sont égaux à rien, car « ce sera souvent le meilleur de les considérer en cette sorte » (*Géométrie*, Éd. Cousin, p. 388). M. Liard ne me semble donc pas autorisé à dire, comme il le fait p. 51, que Descartes emploie des constructions géométriques à résoudre ces questions sur les équations. — Tous les commentateurs de la *Géométrie* ont traité algébriquement les équations (même dans les problèmes de géométrie, comme le montre le titre seul de cet ouvrage de Schooten : *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex Calculo Algebraïco*), et ils ont distingué nettement la résolution de la construction des racines. (Voir en particulier Huddenius, *De Reductione æquationum*. Éd. lat. de la géom., t. I, p. 407, et Schooten, *De concinnandis demonstrationibus*, ibid., p. 351.)

2. Le P. Ciermans avait dit en parlant de la géométrie (Lett. à Descartes Mars 1638. Éd. Cerf, t. II, p. 56). « Mathematica tamen pura potius quam geometria dici mallem. » M. Liard cite cette lettre, mais sans donner la réponse de Descartes où celui-ci tout en se disant flatté ne se rend pas à l'avis de Ciermans (lett. du 23 mars 1638. Éd. Cerf, t. II, p. 70). « nihil « enim ibi eorum quæ ad arithmeticam proprie pertinent explicui,... Sed « præterea nihil etiam docu de motu in quo tamen considerando mathema- « tica pura, ea saltem quam excolui, præcipue versatur. » Voir aussi lett. à Mersenne, 23 août 1638. Éd. Cerf, t. II, p. 328. « Que j'ai écrit une géométrie et non une arithmétique. »

3. Si l'analyse est si souvent dissimulée dans l'œuvre de Descartes et remplacée par des considérations géométriques, c'est qu'elle passait alors

Ainsi la représentation géométrique n'intervient pas directement dans la résolution des équations. Ce n'est pas qu'il ne puisse être souvent avantageux de construire leurs racines; mais ce sera seulement un moyen d'illustrer la démonstration, rien de plus. L'imagination aura cependant en algèbre un rôle non négligeable, quoique plus modeste. Elle contribuera d'abord, comme j'ai essayé de le montrer plus haut, à établir les premiers principes de cette science. Il suffira, en effet, de figurer par des segments de droites deux quantités algébriques, pour en obtenir immédiatement la somme, le produit, le rapport[1]. Mais il ne faudra jamais oublier que ces droites sont là seulement pour représenter les grandeurs en général : pour l'imagination, ce sont des figures géométriques, mais l'entendement ne voit en elles que des quantités pures, et il en serait de même si nous traduisions ces quantités en mouvements, en vitesses ou en toute autre chose. Toutefois, il est plus simple de nous les représenter

pour une méthode de découverte, non d'exposition. — Voici ce que Viète disait à ce sujet (*Isagose in Artem Analyticam*. Éd. Schooten, p. 16.) « Singula problemata suas habent elegantias, verum ea ceteris antefertur quæ « compositionem operis (c'est-à-dire la construction géométrique) non ex « æqualitate, sed æqualitatem ex compositione arguit et demonstrat... « Itaque artifex geometra quanquam Analyticum edoctus, illud dissimulat « et tamquam de opere efficiundo cogitans, profert suum syntheticum pro- « blema et explicat. »

1. Voir *Regulæ* XIV, 113, 117, XV et XVII. Cf. Schooten (*Principia matheseos*. Éd. lat. de la géométrie, t. II, p. 1, et sqq.). « Attamen quia « tum phantasiæ, tum sensibus ipsis nihil simplicius nec distinctius exhi- « beri posse occurrit quam rectæ lineæ, quæque relationes et proportiones, « quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent : præstat per « prædictas litteras solummodo lineas rectas concipere. » Quand il traite des opérations sur les monômes, Schooten répète, à propos de chaque opération, que les lettres représentent des droites. Il dit par exemple : « Igitur ad addendum lineam a ad lineam b. scribo pro summa $a + b$ ». Cf. Florimond de Beaune (*Notæ Breves*. Éd. cit., p. 107). « Optimum vero « est ad stabilienda hujus scientiæ præcepta et ad cognitionem ejus asse- « quendam ut generaliter rationes hasce in lineis consideremus, cum sim- « plicissimæ sint et hoc sibi vendicent, quod rationes omnes quæ inter « quascumque alias res considerari possunt exprimant : id quod numeri « non efficiunt... » — On sait que la représentation géométrique est encore fort employée aujourd'hui. Les travaux de Chasles sur les segments affectés de signes l'ont plus que jamais remise en honneur. On sait aussi que la représentation d'un nombre imaginaire par un point du plan a été l'origine de la théorie moderne des fonctions.

sous forme de grandeurs étendues. L'étendue, en effet, est l'essence même des corps; de plus et pour la même raison, toute image imprimée dans l'imagination est une véritable figure [1] : par exemple, dit Descartes, nous nous représentons forcément la couleur comme quelque chose d'étendu, et par suite, de figuré. Dès lors, quoi de plus naturel que de voir dans toute quantité une ligne ou une surface géométrique [2] ?

Nous aurons donc recours à cette interprétation pour donner à l'algèbre ses principes fondamentaux. Mais ensuite on pourra de ces principes faire sortir toute une suite de propositions sans le secours d'aucune intuition géométrique. Devons-nous en conclure que l'imagination ait achevé son rôle ? Il n'en est rien : en créant l'algèbre, la plus générale des sciences connues, on n'a pas encore dépouillé les grandeurs de toute figure particulière ; on sera encore forcé de se servir d'images, abrégées, il est vrai, et offrant juste assez de prise à la mémoire pour qu'elle puisse en conserver le souvenir : je veux parler des lettres et des différents signes algébriques. Une des innovations principales de Descartes est, on le sait, la substitution de notations simples et claires aux obscurs symboles de Viète : n'est-ce pas la preuve que le

1. *Regulæ* XIV, 113. Éd. Garnier, p. 117. « Hanc vero (magnitudinis spe- « ciem quæ omnium facillime in imaginatione nostra pingitur) esse exten- « sionem realem corporis abstractam ab omni alio quam quod sit figurata, « sequitur ex dictis ad regulam duodecimam, ubi phantasiam ipsam cum « ideis in illa existentibus nihil aliud esse concepimus quam verum corpus « reale extensum et figuratum. » — Descartes dit en effet dans la règle XII (§ 77) : — « hanc phantasiam esse veram partem corporis et tantæ magnitu- « dinis ut diversæ ejus portiones plures figuras ab invicem distinctas « inducere possint ». — Sur les couleurs représentées par des figures, voir *Regulæ* XII, 75.

2. Dans la Règle XV, Descartes dit qu'il faut représenter les grandeurs par des suites de points si elles sont discontinues, et par des segments de droites ou des rectangles si elles sont continues : par exemple le produit de deux quantités a et b est représenté par la surface d'un rectangle. Mais plus tard, Descartes eut l'idée de figurer par des droites même les produits de facteurs et c'est ainsi qu'il put étendre à toutes les quantités algébriques l'interprétation géométrique qui, pour Viète, cessait d'être possible dès la quatrième puissance. Nous lisons en effet dans la *Géométrie* : « Par a^2 ou b^3 « je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que « pour me servir des noms usités en l'algèbre je les nomme des carrés « ou des cubes ». Cf. Beaune, *Notæ breves*. Éd. cit., p. 108, et Schooten, *Principia Matheseos*. Éd. cit., p. 1. Sur cette différence importante entre les *Regulæ* et la *Géométrie*, voir l'Appendice II.

signe joue encore, à côté de la chose qu'il représente, un rôle important? Même en analyse, la solution d'un problème ne résulte pas immédiatement des données ; on l'obtient par une voie encore longue, souvent pénible et détournée ; elle ne sera pas non plus toujours absolument générale, et il existe une infinité de courbes et de surfaces transcendantes que l'algèbre cartésienne ne permet pas d'étudier. Enfin l'analyste ne peut pas même se passer du secours des sens, et il est certainement plus aisé de résoudre sans figure un problème de géométrie par la méthode ancienne, que de faire de tête un calcul algébrique un peu compliqué.

Tel est en algèbre le rôle des signes. Or, il est bien évident que si l'entendement pouvait à lui seul résoudre une équation, il n'aurait pas besoin de pareils symboles ; mais il ne le peut pas. Nous avons atteint maintenant la limite au delà de laquelle il n'est plus permis à l'homme de restreindre le rôle de l'imagination. Grâce aux signes inventés par Descartes, nous pourrons profiter du secours de cette faculté sans que ce ce soit une fatigue pour notre esprit, puisque nous nous représenterons toujours les grandeurs mathématiques sous une forme aussi simple que possible[1] : au début comme des segments de droites, ensuite comme de simples lettres affectées de coefficients et d'exposants. Le but que se sont proposé les créateurs de l'algèbre spécieuse est maintenant entièrement atteint.

Telle est, je crois, la véritable interprétation de la mathématique cartésienne. La *Géométrie* en est sans doute le plus gros morceau, la partie la plus nouvelle ; mais elle n'en est pas le centre, comme on pourrait le croire si on l'analysait du dehors au lieu de la replacer dans le système du philosophe. A aucun moment Descartes n'a perdu de vue le but qu'il s'est proposé sans cesse : éliminer des différentes sciences toutes les notions qui ne peuvent pas être conçues par l'entendement seul, c'est-à-dire qui ne sont pas objets d'idées claires ; car c'était le seul moyen de les ramener toutes à une science unique, la mathématique universelle, ainsi qu'il l'avait rêvé. A l'époque où il concevait cet ambitieux projet, Descartes, nous le verrons[2], ne

1. Voir *Regulæ*, XII, 80, p. 99 : « ...compendiosæ figuræ, quæ modo sufficiant ad cavendum lapsum ; quo breviores, eo commodiores existunt ». Cf. *Géométrie*. Éd. Cousin, p. 315.

2. Voir l'Appendice II.

possédait pas encore, à proprement parler, sa méthode mathématique ; il ne s'était pas encore heurté aux difficultés de la pratique ; peut-être alors a-t-il cru un instant possible la réalisation de cette science universelle, qui eût été le terme des recherches de l'homme. Mais c'était là ou un rêve de jeunesse, ou la conception philosophique d'un idéal irréalisable. Descartes, homme fait, n'a jamais songé à créer une mathématique universelle, et n'a même pas osé écrire un traité d'algèbre pure. C'est peut-être ce qui a trompé M. Liard qui, cherchant dans l'œuvre du philosophe la « Mathesis universalis » des *Regulæ*, et ne la trouvant nulle part, en vint à croire que c'est elle qui se cache sous le titre plus modeste de *Géométrie* [1]. Descartes, dit-il, aurait failli à sa méthode s'il n'avait pas étudié tout d'abord les objets les plus simples, « à savoir les grandeurs en général, considérées en dehors de l'étendue et de toute autre matière où elles peuvent être réalisées [2] ». Mais le simple pour nous, c'est le résultat de l'analyse : or, l'analyse a une limite et ne réussit pas à dépouiller les grandeurs de toute qualité. La science des quantités nues, la science absolument universelle, n'est pas possible pour l'homme. Elle le serait seulement pour un entendement qui saurait s'affranchir complètement de l'imagination et des sens.

Que serait donc la science pour un tel entendement? S'il n'est pas trop hardi de répondre à une semblable question, on peut, je crois, soutenir qu'elle serait, d'après Descartes, un état de contemplation passive et toujours actuelle. Achevée aussitôt que commencée, elle ne se déroulerait pas, comme pour nous, en une longue file de théorèmes, car l'entendement pur embrasserait à la fois et dans leur ensemble, toutes les vérités que l'homme découvre l'une après l'autre. Du point de vue de l'entendement, pour qui le temps n'a aucune réalité, il n'est pas vrai qu'une proposition en précède une autre ou en donne la raison : toutes sont également primitives et évidentes par elles-mêmes. On en trouverait la preuve dans notre science, car l'ordre des démonstrations n'y a pas une valeur absolue, mais nous est dicté par les nécessités de la pratique. Soit par exemple une ellipse : cette courbe jouit de différentes propriétés : elle est la projection du cercle sur un plan ; elle est le lieu géométrique des points équidistants d'un cercle et d'un point pris à l'intérieur, le lieu des

1. Le chapitre où M. Liard étudie la *Géométrie* de Descartes, est intitulé par lui : *La Mathématique universelle.*

2. Liard, *Descartes*, p. 44.

points dont les distances à deux points fixes ont une somme constante. Parmi ces propriétés, y en a-t-il une qui soit fondamentale, qui doive être énoncée la première ? Rien ne nous l'indique : en fait, les géomètres choisissent arbitrairement tantôt l'une, tantôt l'autre, pour définir l'ellipse, et en déduisent les autres dans l'ordre qui leur paraît pratiquement le plus simple : toutes ces manières de procéder réussissent également bien. N'est-ce pas la preuve que dans l'absolu les propositions que je viens d'énoncer sont simultanées et non successives ? Et l'importance qu'a pour nous l'ordre des démonstrations, importance que Descartes, un des premiers, a si excellemment mise en lumière, n'est-elle pas précisément la marque de notre faiblesse ?

Cette conclusion surprendra peut-être : si la méthode de Descartes n'est qu'un pis-aller, comment expliquer qu'il en soit si fier ? Mais je crois précisément qu'on peut fort bien l'expliquer. L'ordre est, dans la science, ce qui appartient à l'homme. Nous disposons de lui : au contraire, nous sommes sans pouvoir sur les idées, qui forment autour de nous un monde suprasensible. Quelle est alors la tâche du philosophe ? C'est de porter au plus haut degré de perfection ce qu'il sait pouvoir être modifié, c'est de créer une méthode parfaitement adaptée à notre nature et en même temps à l'usage que nous en voulons faire. Remarquons alors quelles conséquences s'ensuivent. Le besoin d'une méthode est une imperfection ? Eh bien ! la méthode, en permettant à l'homme de créer une science où l'imagination ait une place de plus en plus petite, une science se rapprochant de plus en plus de la science parfaite, la méthode, aura précisément pour objet de se rendre inutile. Grâce à l'algèbre, on trouvera avec un peu de patience ce qu'autrefois le génie seul pouvait découvrir. Ainsi, parce qu'il a compris combien, en fait, l'imagination est indispensable à notre science, et pour quelles raisons, Descartes a pu nous apprendre à nous passer d'elle dans une certaine mesure.

Mais il n'a pas prétendu le faire complètement. Ce ne serait pas, il est vrai, théoriquement impossible, l'union de l'âme et du corps étant un simple fait ; aussi bien, d'ailleurs, qu'il n'est pas théoriquement impossible que nous découvrions un jour assez exactement la nature et la raison véritable de toutes chose pour qu'elles nous apparaissent immédiatement, sans qu'il faille recourir à des intermédiaires : mais c'est là un idéal qui ne sera jamais réalisé dans la pratique.

L'entendement est sans cesse arrêté par l'imagination. Dès qu'il conçoit une idée, elle se représente l'image correspondante ; mais, ayant un champ limité, elle peut moins que lui et le contraint à faire moins qu'il ne peut. L'entendement est alors obligé de diviser la difficulté, d'agir dans le temps, et l'imagination, qui était primitivement une entrave, devient pour lui une auxiliaire indispensable. Ainsi la science humaine est condamnée à ne jamais atteindre la perfection, qu'elle entrevoit cependant. Ce qu'elle a de mieux à faire est donc d'en prendre son parti et de suppléer par l'art à ce qui manque à notre esprit. Voilà sur quels principes est fondée l'algèbre spécieuse : sachant faire un usage suffisant de l'imagination, tout en laissant à l'entendement sa liberté d'action, cette science, Descartes le proclame à maintes reprises, est, sinon la plus parfaite, du moins, pour l'homme, la plus commode et la plus utile.

APPENDICE I

L'analyse de Viète et celle de Descartes au point de vue du rôle de l'imagination.

Lorsque Descartes se proposait de restreindre le rôle de l'imagination dans la science mathématique, c'est contre la géométrie grecque qu'il s'élevait, et c'est pour la ruiner qu'il créa la géométrie analytique. Au contraire, il ne dit nulle part que sur le sujet qui nous occupe il se soit posé en adversaire des algébristes des temps modernes et, en particulier, de Viète. Cependant, pour être complet, il ne sera peut-être pas inutile de comparer sur ce point les œuvres des deux mathématiciens.

Viète, au début de son algèbre, a, lui aussi, fait usage de l'interprétation géométrique, mais il n'a pas su en tirer le même parti que Descartes ; il figurait en effet le produit de deux facteurs du premier degré par un rectangle, le produit de trois facteurs par un solide; or cette représentation devenait impossible pour lui à partir de la quatrième puissance, puisque l'espace n'a que trois dimensions, et il devait alors ou s'en passer ou y suppléer comme il pouvait. D'après M. Liard [1] ce point aurait une importance capitale et expliquerait la faiblesse de l'algèbre de Viète. Cette algèbre, dit-il n'ayant pas d'interprétation commode pour l'éclairer, était aveugle et engagée dans une voie sans issue ; aussi a-t-il fallu pour l'en tirer que Descartes, créant une interprétation possible dans tous les cas [2], accordât une place prépondérante à l'intuition géométrique.

Bien qu'elle s'appuie sur un fait indiscutable, je ne crois pas pouvoir adopter cette conclusion. J'ai montré en effet que la partie géométrique de l'œuvre de Descartes ne peut pas être

1. Liard, *Descartes*, pp. 57-59.
2. Voir plus haut page 32, note 2.

considérée comme la plus importante. En outre, aux yeux de ce philosophe, une science est aveugle non pas parce qu'elle ne fait pas un usage suffisant de l'imagination, mais au contraire parce qu'elle laisse cette faculté entraver l'action de l'entendement : or, j'espère faire voir que ce fut là précisément le grand défaut de l'algèbre de Viète.

Oui, Descartes a principalement réformé l'interprétation géométrique ; mais peut-on affirmer que le point central de son système soit précisément celui sur lequel il a le plus innové? Ce serait supposer *a priori* qu'il a eu pour but principal de s'opposer à Viète. Or, cela n'est pas certain, quoiqu'on l'ait dit souvent. Descartes n'a jamais prétendu avoir renversé la science de son prédécesseur, dont il n'attaque jamais le fond et qu'il avoue lui-même avoir continuée [1] ; il lui adresse seulement des critiques de détail, relatives à la complication des notations [2]. D'ailleurs si ce pédant et obscur savant lui a souvent arraché des boutades bien naturelles, il savait quelquefois lui rendre justice. Il le reconnaît, certains problèmes résolus par lui pouvaient l'être avec l'analyse de Viète [3], et nous lisons dans une lettre de 1643 les lignes suivantes [4] : « Viète a été sans doute un très « excellent mathématicien; mais les écrits qu'on a de lui ne com- « posent pas un corps parfait;... c'est pourquoi si toute sa doc- « trine est mise par ordre par quelque savant homme qui prenne « la peine de l'expliquer fort clairement, l'ouvrage en sera fort « utile et fort beau ». Ainsi Descartes semble admettre que Viète a bien eu déjà l'idée d'une science universelle, mais qu'il n'a pas poussé aussi loin que lui la réalisation de cette idée. D'où peut donc venir cette infériorité?

Nous trouvons chez Viète une conception très nette de la méthode analytique, qui, dit-il, doit permettre de résoudre tous les problèmes. Ainsi, dans l'*Isagoge in Artem analyticam* (chap. V), il définit parfaitement les équations et leur rôle : « Magnitudi- « nes tam datæ quam quæsitæ secundum conditionem quæstioni « dictam adsimilantor et comparantor, addendo, subducendo,

1. *Lettres à Mersenne*, Décembre 1637. Éd. Cerf, t. I, p. 479 et 31 mars 1638. Éd. Cerf, t. II, p. 82.

2. *Discours de la Méthode*, II.

3. Voir *Lettre à Mersenne*, 29 juin 1638. Éd. Cerf, t. II, p. 193.

4. Édition Cousin, t. IX, p. 143. N'oublions pas, non plus, que les œuvres de Viète furent éditées par un cartésien, Schooten, qui mit en tête une préface élogieuse.

« multiplicando et dividendo, constanti ubique homogeneorum « lege servata ». Il enseigne ensuite à résoudre l'équation du premier degré au moyen de l'*antithesis*[1], opération consistant à faire passer un terme d'une équation d'un membre dans l'autre. Enfin il donne une série de règles permettant de ramener une infinité d'équations nouvelles à celles qu'il vient d'étudier. Ces règles sont celles qu'on observe aujourd'hui encore : abaissement ou élévation du degré (principalement *hypobibasme* et *parabolisme*[3]) et changement de variable[3] (alteratio radicis) ; elles lui auraient permis sans doute de pousser fort loin l'étude des équations, si certaines préoccupations ne l'avaient pas empêché d'en tirer parti.

Viète comprit bien qu'il avait trouvé une règle permettant de résoudre toutes les équations du premier degré, c'est-à-dire qu'on pourrait recommencer dans tous les cas particuliers le raisonnement qu'il venait de faire sur un exemple ; mais, chose curieuse, il ne sut pas énoncer cette règle ; il ne comprit pas, sans doute parce que ce type ne représentait rien à son imagination, que toutes les équations du même degré peuvent être représentées par une même équation-type, et il crut nécessaire de démontrer dans chaque cas particulier ce qu'il suffisait de dire une seule fois. Aussi n'a-t-il pas donné la formule générale si connue aujourd'hui ; mais il a, dans les *Notæ priores ad Logisticen speciosam* et dans les *Zetetica*, catalogué un grand nombre d'équations[4], qu'il traite d'ailleurs toutes de la même manière, en se justifiant en ces termes[5] : « Logisticis speciosæ doctrina « quatuor quæ in Isagogicis exposita sunt canonicis præceptis « absolvitur. Verumtamen prœstat exemplificari frequentiora « aliquot opera et subnotari ea quæ interdum occurrunt compen- « dia, ne Logistam deinde anfractus similes remorentur ». De

1. *Isagoge in Artem analyticam*, Éd. Schooten, p. 15.

2. L'hypobibasme consiste à diviser, et le parabolisme à multiplier les deux membres d'une équation par l'inconnue.

3. Théorie exposée dans la seconde partie du *De Recognitione æquationum* et dans le *De emendatione æquationum*. Citons la transmutatio πρῶτον-ἔσχατον, qui, en langage moderne, consiste à poser $x = \frac{k}{y}$ et l'expurgatio per uncias qui permet d'éliminer le terme du second degré dans une équation quelconque.

4. Ces équations, résolues algébriquement, sont ensuite appliquées par l'auteur à des problèmes de géométrie.

5. *Ad Logisticen speciosam Notæ priores*. Éd. Schooten, p. 18.

même Viète ne ramène pas à une forme unique les équations du second degré ; mais il en considère trois types principaux [1] :

L'équation κατaφατική : A quad. + B in A æquatur Z quad. ;

L'équation ἀποφατική : A quad. — B in A æquatur Z quad. ;

L'équation ἀμφίβολος : B in A — A quad. æquatur Z quad.

Ces exemples suffisent à prouver que Viète n'a pas vu comme Descartes l'universalité et l'unité de la méthode analytique, universalité et unité qui, nous l'avons dit, viennent de l'entendement. Dupe de son imagination, il n'a pas cru possible de réduire à une seule forme des équations qui représentent des objets fort différents ; et ainsi, ce n'est pas faute d'une interprétation géométrique qu'il est resté en route, mais bien au contraire parce qu'il s'est trop servi de cette interprétation [2].

A ce défaut de méthode sont dus tous les points faibles de son œuvre. — En particulier, il a toujours pris le signe — au sens vulgaire, en sorte qu'il ne croyait pouvoir l'employer que dans des cas fort peu nombreux, et diminuait d'autant les avantages

1. En langage moderne : $x^2 + bx = c^2$; $x^2 - bx = c^2$; $- x^2 + bx = c^2$. Une des raisons qui empêchent Viète de considérer sous leur forme générale les équations de degré supérieur au premier, est qu'il croit que le type parfait de ces équations est l'équation homogène. A celle-là il essaye de ramener les équations qui contiennent un *homogeneum affectionis*, c'est-à-dire des termes de degré inférieur à leur propre degré (sub parodico ad potestatem gradu). Il dit par exemple : Si A quad. æquetur Z plano, A + B esto E ; E quad. — B in E2 æquabitur Z plano — B quad. (Deductiva quadratorum affectorum a puris. Voir le *De Recognitione æquationum*. Ed. Schooten, p. 93 et sqq.) Cette opération se nomme *plasma*. Mais au lieu d'en donner les règles générales, Viète l'applique à un nombre considérable d'exemples particuliers se suivant sans ordre, et qu'il ne sait pas relier entre eux.

2. L'interprétation géométrique conduit Viète à un ordre d'exposition tout à fait vicieux. Soit par exemple à traiter la question suivante : Data media trium proportionalum linearum rectarum et differentia inter extremas, invenire minorem extremam (*Zetetica*, III, 1), Viète se croit forcé de faire appel à l'intuition géométrique, et ramène cette question au problème suivant : Dato rectangulo sub lateribus et differentia laterum, invenire latera (*Zetetica*, II, 3). Or, ce problème, Viète l'a précisément résolu par l'algèbre, c'est-à-dire en le ramenant à la question qu'il prétend maintenant lui ramener. (Enimvero, dit-il, quadratum differentiæ laterum adjunctum quadruplo rectangulo sub lateribus æquatur quadrato adgregati laterum. Data porro differentia duorum laterum et eorum summa, dantur latera). L'énoncé géométrique qu'il se croit forcé d'indiquer pour donner un sens à son raisonnement, ne fait donc que compliquer les choses.

présentés par le raisonnement algébrique. Pour remédier à cet inconvénient, Viète a donné dans le *De emendatione æquationum* des règles fort ingénieuses permettant d'éliminer le signe — à l'aide de changements de variables ; mais il en résultait une multiplicité et une complication de formules toujours croissantes. Ainsi cette généralité des règles de l'analyse, aperçue par le savant du XVI[e] siècle au début de son œuvre, lui échappait de plus en plus ; et, M. Liard avait raison de le dire, son algèbre se trouvait engagée dans une impasse ; mais que fallait-il pour l'en tirer ? Fallait-il la régénérer par l'interprétation géométrique, en faisant appel à l'imagination ? Il fallait, bien plutôt, réduire l'importance de cette interprétation, ramener à un petit nombre de règles les résultats épars dans les ouvrages de Viète, et développer, avant tout, la théorie de la résolution algébrique des équations. Or ce fut là, précisément, le présent travail avait du moins pour but de le montrer, l'œuvre de Descartes.

APPENDICE II

Note sur les « Regulæ ».

Je n'ai eu à signaler, dans le cours de ce travail, aucune différence de doctrine importante[1] entre les *Regulæ ad directionem ingenii*, et les ouvrages postérieurs de Descartes. On trouve déjà dans les *Regulæ* la conception d'une science dépendant seulement de l'entendement, et ayant par suite un caractère universel. Mais Descartes ne semble pas avoir fait dans cet écrit les réserves qu'il fit plus tard sur la possibilité de la réalisation d'une telle science. Il affirme dans la quatrième règle qu'il existe une « Mathesis Universalis » à laquelle se ramènent la mécanique, l'astronomie, la physique[2] : or nous avons vu plus haut que Descartes a vite renoncé à créer cette mathématique universelle. Pourquoi a-t-il ainsi reculé ? Probablement parce que, à l'époque où il écrivit les *Regulæ*, il possédait seulement l'idée directrice de sa méthode mathématique, mais ne l'avait pas encore suffisamment approfondie et éprouvée. C'est ce que je vais essayer d'établir, afin de montrer comment j'ai eu le droit de dire dans ce travail que l'idée d'une « Mathesis Universalis » ne pouvait être chez Descartes qu'un rêve de jeunesse.

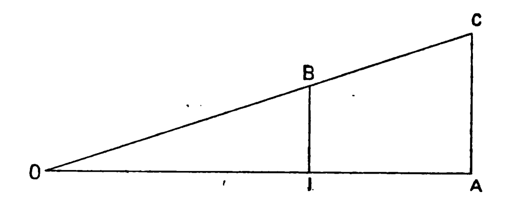
Dans la seconde partie des *Regulæ*, Descartes commence à nous donner les règles de son algèbre ; mais il s'arrête après avoir défini les quatre opérations, ce qui semble indiquer qu'il ne savait quelle marche suivre pour continuer[3]. Ce court début

1. Voir page 6, note 3.

2. Les commentateurs de Descartes, en particulier Er. Bartholinus, l'auteur de la *Præfatio ad lectorem* de l'Édition latine de la *Géométrie*, le déclarent également.

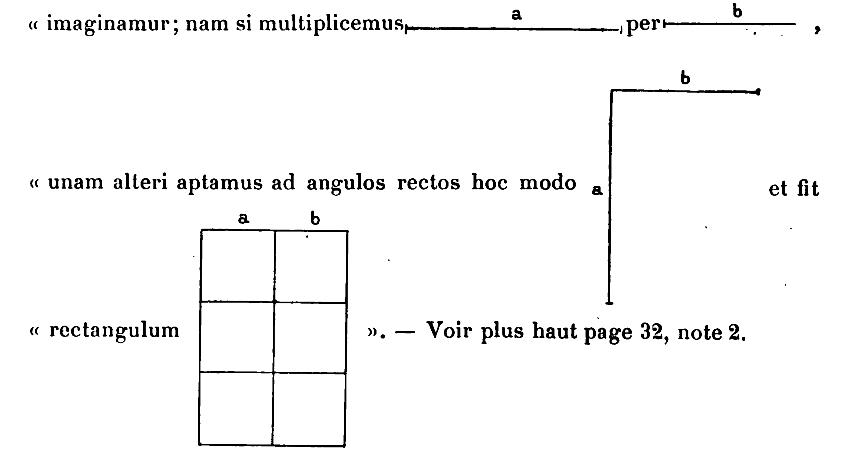
3. Cette opinion s'accorde d'ailleurs fort bien avec le texte suivant, dans lequel on voit généralement une allusion aux *Regulæ* : « Que si vous trou- « vez étrange de ce que j'avais commencé quelques autres traités étant à « Paris, lesquels je n'ai pas continués, je vous en dirai la raison : c'est que « pendant que j'y travaillais j'acquérais un peu plus de connaissance que « je n'en avais eu en commençant, selon laquelle me voulant accommoder « j'étais contraint de faire un nouveau projet un peu plus grand que le pre-

suffit d'ailleurs à prouver qu'il n'a pas encore l'idée de la géométrie analytique. Il ne s'aperçoit pas encore qu'une quantité algébrique quelconque peut être regardée comme la longueur d'un segment, interprétation nécessaire cependant, si l'on veut voir dans la fonction $y = f(x)$ l'expression de la distance d'un point à un axe fixe Ox. Au lieu de cela, Descartes propose dans la règle XVIII de figurer par la surface d'un rectangle le produit de deux facteurs[1]. Dans la *Géométrie* de 1637, au contraire, il remarquera que le produit ab est quatrième proportionnelle entre a, b et l'unité, en sorte qu'on peut le construire en formant deux triangles semblables OBI, CAO tels que OI = 1, OA = a, OB = b. On aura alors en effet OC = ab.



« mier... », *Lettre à Mersenne*, du 15 avril 1630, Éd. Cerf, t. I, p. 137.) Mais il n'est pas certain qu'il s'agisse ici des *Regulæ*, qui devaient, comme on sait, s'achever par un traité d'algèbre. Descartes dit en effet qu'il continue plus que jamais à s'occuper de ces traités commencés à Paris ; or cela semble indiquer qu'il n'y est pas question de mathématiques, car Descartes écrit précisément dans la lettre du 15 avril 1630 : « Je suis si las des Mathématiques, et en fais maintenant si peu d'état... ».

4. *Regulæ*, XVIII, 140. Éd. Garnier, p. 135 : « In multiplicatione concipimus « magnitudines datas sub ratione linearum ; sed ex illis rectangulum fieri « imaginamur; nam si multiplicemus a per b, « unam alteri aptamus ad angulos rectos hoc modo et fit « rectangulum ». — Voir plus haut page 32, note 2.



Il y a là une première raison de croire que, lorsqu'il écrivit les *Regulæ*, Descartes n'avait pas encore fait ses grandes découvertes mathématiques. L'étude de la *Correspondance* va nous confirmer dans cette opinion, en nous montrant que ces découvertes ne doivent pas être antérieures à 1631 ou 1632. Or, suivant tous les historiens, les *Regulæ ad directionem ingenii* datent au plus tard de 1629.

Dès 1629 Descartes conçoit le projet de publier un traité général de physique[1] : « Je me suis résolu, écrit-il à Mersenne, « d'expliquer tous les phénomènes de la nature, c'est-à-dire « toute la physique ». C'est ce traité qu'il appela plus tard son *Monde*, et qu'il renonça, comme on sait, à faire imprimer. Bientôt après il entreprend la *Dioptrique*. Au contraire, c'est en mars 1636 qu'il est, pour la première fois, question de la *Géométrie*[2] dans la Correspondance de Descartes : « C'est, écrit-il « en 1637, un traité que je n'ai quasi composé que pendant « qu'on imprimait mes *Météores*, et même j'en ai inventé une « partie pendant ce temps-là ». Or, on sait quelle importance Descartes attachera plus tard à sa *Géométrie*, disant que c'est surtout par elle qu'il a démontré l'efficacité de sa méthode[3]. Si donc ce n'est pas tout d'abord cet ouvrage qu'il veut joindre au *Discours de la Méthode*, c'est sans doute qu'il n'a pas encore inventé les théories qui en font l'objet.

A partir de 1632 nous voyons Descartes entretenir constamment Mersenne de ses travaux mathématiques. Au contraire, avant cette date, il se dit las des mathématiques, et déclare n'en plus faire aucun état[4]. On voit, d'après ses lettres, qu'il ne s'intéresse alors qu'aux questions de physique et se sert tout au plus, pour les traiter, de la géométrie élémentaire. Il envoie, il est vrai, en 1630, une *Algebra* à Beeckmann[5] ; mais c'est là un écrit sans importance, qui, il le dit lui-même en 1638, ne mérite pas d'être lu. D'ailleurs, on reconnaît, à de nombreux indices, qu'il

1. Voir les *Lettres à Mersenne*, du 8 octobre et du 13 novembre 1629, Éd. Cerf, t. I, p. 23 et p. 70.

2. *Lettre à Mersenne*. Éd. Cerf, t. I, p. 339.

3. *Lettre à Mersenne*. Avril 1637.

4. *Lettre à Mersenne* du 15 avril 1630, déjà citée.

5. Voir *Lettre à Beeckmann*, du 17 octobre 1630. Éd. Cerf, t. II, p. 159. — C'est sans doute cette *Algebra* que Descartes appelle plus tard : « sa « vieille algèbre ». Il n'y a probablement pas lieu d'identifier cet ouvrage de jeunesse avec l'*Introduction* de 1638, que Descartes dit n'être pas de lui.

ne sait pas encore, à cette époque, tirer utilement parti de l'analyse. Ainsi, en novembre 1629, voulant étudier la loi de la chute des corps, il commet une grossière erreur en essayant de se servir de deux axes de coordonnées [1], et au lieu de représenter par une courbe la variation de la vitesse, il la figure encore par une surface.

En Avril 1630, Mersenne lui ayant demandé des énoncés de problèmes, il répond [2] : « J'en mettrai ici trois que j'ai autrefois « trouvés sans aide que de la Géométrie simple, c'est-à-dire « avec la règle et le compas. J'en trouverois bien de plus « difficiles si j'y voulois penser, mais je ne crois pas qu'il en « soit de besoin », et il indique des problèmes élémentaires. Il aura un tout autre ton, quelques années plus tard, lorsqu'il se fera un plaisir de proposer aux savants du monde entier des questions qu'il les défiera de résoudre.

Ces quelques faits suffisent, je crois, à prouver qu'entre 1629 et 1631 Descartes a abandonné à peu près complètement les mathématiques. Il ne recommença à s'y adonner qu'à la fin de 1631, lorsque Golius lui proposa le problème de Pappus, et l'on peut dire que c'est à l'occasion de ce problème qu'il créa la géométrie analytique. A partir de cette époque, en effet, et de cette époque seulement, il parle avec enthousiasme de la méthode qu'il a employée pour le résoudre, comme s'il venait seulement de l'inventer [3].

Il applique bientôt cette même méthode à d'autres problèmes [4] ; elle devient petit à petit l'objet principal de ses recherches ; et ainsi, des différents ouvrages publiés par lui en 1637, c'est la *Géométrie*, sorte de post-scriptum composé en quelques jours, qui devait bientôt lui inspirer le plus de fierté.

1. *Lettre à Mersenne*, du 13 novembre 1629. — Voir la note de M. Taunery, Éd. Cerf, t. I, p. 75.

2. *Lettre à Mersenne*, du 15 avril 1630, Éd. Cerf, t. I, p. 139.

3. Voir *Lettre à Golius*, Janvier 1632, Éd. Cerf, t. I, p. 232, et les lettres suivantes.

4. Voir *Lettre à Stampioen*, fin 1633, Éd. Cerf, t. I, p. 275.

OUVRAGES CITÉS

DESCARTES. — *Regulæ ad directionem ingenii.* Éd. Garnier (texte latin).

— *Correspondance.* Éd. Adam et Taunery, Versailles, Cerf (les trois premiers tomes); et Éd. Cousin, t. IX et X.

— *Manuscrit de Göttingen.* Revue bourguignone de l'Enseignement supérieur. Année 1896.

— *Manuscrit de Hanovre.* Bulletin des Sciences mathématiques. Année 1896.

Les autres ouvrages de Descartes sont cités d'après l'édition Cousin.

ÉDITION LATINE DE LA GÉOMÉTRIE publiée chez Elzévir par François Schooten, et contenant les ouvrages des commentateurs de Descartes.

VIÈTE. — *Opera Mathematica.* Éd. Schooten.

LIARD. — *Descartes*, Paris, F. Alcan.

TABLE DES MATIÈRES

MACON, PROTAT FRÈRES, IMPRIMEURS



LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN, 108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

BIBLIOTHÈQUE

DE LA

FACULTÉ DES LETTRES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

I. — **De l'authenticité des Épigrammes de Simonide**, par AMÉDÉE HAUVETTE, professeur adjoint de langue et de littérature grecques à la Faculté. 1 vol. in-8°. . . . . 5 fr.

II. — **Antinomies linguistiques**, par VICTOR HENRY, professeur de sanscrit et de grammaire comparée des langues indo-européennes à la Faculté. 1 vol. in-8°. . . . . 2 fr.

III. — **Mélanges d'histoire du moyen âge**, publiés sous la direction de M. le Professeur LUCHAIRE, par MM. LUCHAIRE, DUPONT-FERRIER et POUPARDIN. 1 vol. in-8° . . . . 3 fr. 50

IV. — **Études linguistiques sur la Basse-Auvergne. Phonétique historique du patois de Vinzelles**, par A. DAUZAT, licencié ès lettres. Préface de A. THOMAS, chargé du cours de philologie romane à la Faculté. 1 vol. in-8°. . . . . 6 fr.

V. — **La Flexion dans Lucrèce**, par A. CARTAULT, professeur de poésie latine à la Faculté. 1 vol. in-8°. . . . . 4 fr.

VI. — **Le Treize Vendémiaire an IV**, par HENRY ZIVY, étudiant à la Faculté. 1 vol in-8°. . . . . 4 fr.

VII. — **Essai de restitution des plus anciens mémoriaux de la Chambre des Comptes de Paris** (*Pater*, *Noster* [1], *Noster* [2], *Qui es in cœlis*, *Croix*, *A* [1]), par MM. JOSEPH PETIT, archiviste aux Archives nationales, GAVRILOVITCH, MAURY et TEODORU, avec une préface de CH.-V. LANGLOIS, chargé de cours à la Faculté. 1 vol. in-8°, avec une planche hors texte. . . . . 9 fr.

VIII. — **Études sur quelques manuscrits de Rome et de Paris**, par ACHILLE LUCHAIRE, professeur d'histoire du moyen âge à la Faculté. 1 vol. in-8°. . . . . 6 fr.

IX. — **Étude sur les Satires d'Horace**, par A. CARTAULT, professeur de poésie latine à la Faculté. 1 vol. in-8°. . . . . 11 fr.

X. — **L'Imagination et les Mathématiques selon Descartes**, par PIERRE BOUTROUX, licencié ès lettres. 1 vol. in-8°. . . . . . 2 fr.

SOUS PRESSE

XI. — **Étude sur le dialecte alaman de Colmar (Haute-Alsace)**, par VICTOR HENRY, professeur de sanscrit et de grammaire comparée des langues indo-européennes à la Faculté. 1 vol. in-8°.

XII. — **La main-d'œuvre industrielle en Grèce**, par P. GUIRAUD, professeur adjoint à la Faculté. 1 vol. in-8°.

MACON, PROTAT FRÈRES, IMPRIMEURS.



Photomount
Pamphlet
Binder
Gaylord Bros.
Makers
Stockton, Calif.
PAT. JAN. 21, 1908
Stanford University Libraries
3 6105 019 994 685

